Покорный Ю.В.

Оптимальные задачи

Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

Москва ♦ Ижевск

2008

УДК ???
ББК ???
???

Покорный Ю.В.

Оптимальные задачи. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. — ??? с.

В настоящем пособии излагается материал лекционного курса, на протяжении более трех десятилетий читающийся студентам-математикам Воронежского государственного университета.

ISBN 978-5-93972-???-? **ББК ???**

http://shop.rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Предисловие

Прежде чем стать предметом печатного пособия, излагаемый ниже материал более 15 лет «обкатывался» на лекциях для студентов-математиков Воронежского университета. В конце 60-х годов XX века почти сразу вслед за МГУ в Воронежском университете по инициативе М. А. Красносельского был введен курс «Оптимальное управление», подготовка и чтение которого были поручены автору. Необходимость ознакомить студентов с крупнейшим математическим достижением середины XX века — принципом максимума Понтрягина — сочеталась с полным отсутствием учебной литературы, доступной для основной массы наших студентов. Монография Понтрягина Л. С. (и его учеников), как показала наша учебная практика, годилась лишь как пособие для спецкурсов.

Почти сразу «Оптимальное управление» в рамках более обширного курса оказалось примкнутым к «Вариационному исчислению». Естественно было и еще одно методологическое желание — включить в этот «Оптимальный универсум» конечномерную негладкую оптимизацию (линейное и выпуклое программирование), также являвшуюся крупным достижением математической мысли середины XX века. Весь этот материал должен был вместиться в лекционный объем порядка 70 часов.

Поиск наиболее доступных форм изложения этого материала, стремление сохранить богатство классических идей вариационного исчисления, новизну и качественную глубину принципа максимума и конечномерной оптимизации — в сочетании с желанием сопровождать весь материал четкими доказательствами — все это достаточно мучительно решалось первые пять лет, а затем отшлифовывалось следующие 10 лет. В 1985 году вышло первое издание предлагаемого пособия, ввиду малотиражности (издательство ВГУ) быстро разошедшееся. Почти без изменений книга переиздавалась несколько раз, адресуясь студентам ВГУ и расходясь среди других заинтересованных лиц.

За прошедшие три с лишним десятилетия в рамках учебного плана материал претерпел несколько внешних трансформаций. Однако содержание его уже стало инвариантным.

На взгляд автора, более чем тридцатилетний опыт формирования и лекционной обкатки оптимизационного материала может представлять интерес и для более широкой аудитории. Тем более что последние годы

оптимизационные идеи привлекают внимание все более широкого круга учебных заведений.

С 1986 года эстафету чтения курса приняли (и до сих пор успешно поочередно продолжают) ближайшие ученики автора М. Г. Завгородний, О. М. Пенкин, А. В. Боровских, В. Л. Прядиев, М. Б. Зверева.

Книга рассчитана на читателей, владеющих основами анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений. Для более подготовленных читателей сейчас имеется более серьезная литература типа [1].

О методических обстоятельствах. Первая часть, посвященная вариационному исчислению, является довольно радикальной переработкой учебной литературы, накопленной к 60-м годам. Несмотря на ее обилие, она страдала туманностью объяснений на языке архаизмов, в который интенсивно внедрялись понятия функционального анализа. Стремясь к строгому и чистому изложению классических идей в максимальной прозрачности объяснений, мы ограничились здесь в основном простейшей двухточечной задачей. Обойдя мимо дифференциал Фреше, мы воспользовались коренной (от Лагранжа) идеей дифференцирования по направлениям, что позволило снизить избыточную жесткость предположений о гладкости лагранжиана. В вопросах о связи поля экстремалей с условием Якоби пришлось отступить от традиционных (и весьма нечетких) конструкций, оперевшись на понятие неосцилляции. Раздел о достаточных условиях сильного экстремума (теорема Вейерштрасса) исправляет некоторые интересные, но не слишком корректные аргументы из книжек Эльсгольца Л. Э. (для инженеров).

Вторая часть (о конечномерной оптимизации) в основном следует книге Карманова В. Г. в ее наиболее ранней и внятной версии 60-х годов.

Третья часть является методической переработкой книги Понтрягина Л. С. (с соавторами). Ввиду трудности дать корректное доказательство принципа максимума за доступное время, мы мотивируем этот принцип на базе уравнения Беллмана, которое обсуждается достаточно строго. Теория Гамкрелидзе (о линейных быстродействиях) излагается достаточно строго, мы акцентируем здесь внимание на наиболее важном для приложений понятии функции синтеза, определяющей оптимальное управление, как функцию состояния объекта, а не как функцию времени (как в программных управлениях, представляющих в основном теоретический интерес).

Завершающие книгу дидактические дополнения подготовлены по материалам автора с участием тогдашних ассистентов И. Г. Карелиной, С. П. Майоровой, С. А. Шаброва.

Автор благодарен М. Б. Давыдовой и С. А. Шаброву, взявших на себя компьютерную подготовку книги, а также Е. Л. Тонкову и Ж. И. Бахтиной за улучшающее содействие в подготовке рукописи к печати.

Глава 1

Вариационное исчисление

Вариационное исчисление, являющееся одним из основных методов современного естествознания, отсчитывает свое начало от классического результата Я. Бернулли (1696 г.), решившего задачу о брахистротроне, то есть о кривой наискорейшего спуска.

1.1. Общие понятия. Примеры задач

Классическое вариационное исчисление посвящено анализу условий экстремума интегрального функционала

$$\Phi(x) = \int\limits_{\Omega} F(t, x, x')\, dt \tag{1.1.1}$$

на некотором множестве G функций $x(t)$, определенных и дифференцируемых на $\Omega \subset R^n$ со значениями на R. Множество G определяется обычно дополнительными оговорками или условиями, множество Ω, как правило, имеет связную внутренность.

Например, простейший вариант задачи о брахистротроне может формулироваться так: найти функцию $x_0(t)$, минимизирующую функционал $\Phi(x) = \int_a^b \sqrt{\dfrac{1+x'^2}{x}}\, dt$ на множестве функций $x \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих условиям $x(a) = A$, $x(b) = B$. Здесь $\Phi(x)$ определяет время скатывания материальной точки без трения под влиянием силы тяжести из точки (a, A) в точку (b, B) вдоль кривой, совпадающей с графиком функции $x(t)$. Другой классический пример — дошедшая из глубокой древности задача Дидоны об отыскании кривой, максимизирующей окаймляемую ею площадь. Функционал здесь имеет простейший вид $\Phi(x) = \int_a^b x(t)\, dt$, в роли множества G фигурирует совокупность функций $x \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих условиям $x(a) = x(b) = 0$ и $\int_a^b \sqrt{1+x'^2}\, dt = L$, где L — общая длина всех ограничивающих кривых.

В подобных случаях обычно применяются следующие естественные обозначения: задача исследования функционала Φ на экстремум (максимум или минимум) записывается в виде $\Phi \to \underset{G}{\operatorname{extr}}$ ($\Phi \to \underset{G}{\max}$ или $\Phi \to \underset{G}{\min}$). Если при этом экстремум достигается на элементе x_0, то пишут $x_0 \to \underset{G}{\operatorname{extr}}\, \Phi$. Такие обозначения к недоразумениям обычно не приводят.

Чрезвычайно мощным средством моделирования многих процессов механики является

Принцип Лагранжа. *Среди всех гипотетически (умозрительно) возможных состояний (эволюций) физического объекта реальным является то, которое дает минимум потенциальной (полной) энергии.*

С помощью этого принципа обосновываются постановки важнейших задач математической физики. Опишем одну из них.

Задача о струне. Под струной понимается непрерывная нить, упруго реагирующая на растяжение и не реагирующая на изгиб.

Считая струну натянутой вдоль отрезка $[0, l]$, обозначим через $u(s)$ деформацию (смещение) точки s. На участке $[s, s + ds]$ приращение длины струны равно $\sqrt{1+u'^2(s)}\, ds - ds = (\sqrt{1+u'^2(s)} - 1)\, ds$, и, по закону Гука, упругая реакция элемента $[s, s + ds]$ пропорциональна растяжению и потому равна $p(s)(\sqrt{1+u'^2(s)} - 1)\, ds$. Если прогиб струны вызван лишь внешней силой интенсивности $f(s)$, то на элемент $[s, s+ds]$ действует также сила $f(s)\, ds$. Затраченная этой силой работа равна $[f(s)\, ds]u(s)$ (произведение силы на путь). Поэтому энергия, накапливаемая элементом струны длины ds, равна $[p(\sqrt{1+u'^2} - 1) - uf]\, ds$. Значит, если бы струна приняла форму, определяемую функцией $u(s)$, то в целом на $[0, l]$ ее потенциальная энергия равнялась бы

$$U(u) = \int\limits_0^l [p(\sqrt{1+u'^2} - 1) - uf]\, ds. \tag{1.1.2}$$

При этом условия закрепления концов струны означают $u(0) = u(l) = 0$.

В силу принципа Лагранжа, реальная деформация струны $u_0(\cdot)$ решает задачу $u_0(x) \to \underset{u(0)=u(l)=0}{\min} U(u)$. Так как $\sqrt{1+u'^2} - 1 \approx u'^2/2 - u'^4/8$, то с точностью до членов четвертого порядка малости вместо (1.1.2) имеем

$$U(u) = \int\limits_0^l \left[p\frac{u'^2}{2} - uf\right] ds. \tag{1.1.3}$$

При малых деформациях струны обычно принимается именно эта формула.

Следует отметить, что формула $U(u)$ зависит от того, как закреплен каждый конец струны. Если один из них, например правый, свободен, то у нас отсутствует условие $u(l) = 0$. Если же правый конец упруго подперт (пружиной), то смещение $u(l)$ этого конца вызывает силу реакции $ku(l)$ пружины (k — коэффициент упругости пружины) и преодоление этой силы смещением на расстояние $u(l)$ вызывает работу $\frac{1}{2}[ku(l)]u(l)$, в результате чего $U(u)$ приобретает вид

$$U(u) = \int_0^l \left[p\frac{u'^2}{2} - uf\right] ds + \frac{1}{2}ku^2(l).$$

1.1.1. Общая теорема Ферма

Эйлером было описано дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция, минимизирующая (1.1.3). Наиболее простая схема, объясняющая это уравнение, может быть изложена в абстрактной форме.

Пусть E — линейное пространство над полем вещественных чисел, G — некоторое подмножество из E и Φ — отображение из G в R^1, т. е. $\Phi : G \to R^1$. Такие отображения с абстрактным аргументом и числовыми значениями называют функционалами. При разговоре об экстремуме Φ на G нам удобнее говорить для определенности о минимуме, так как условие максимума легко получается из условия минимума (например, переходом от Φ к $-\Phi$).

Высказывание $x_0 \to \min\limits_G \Phi$ означает справедливость неравенства $\Phi(x) \geqslant \Phi(x_0)$ при всех $x \in G$, достаточно близких к x_0. Понятие достаточной близости подразумевает, естественно, наличие у x_0 системы окрестностей. Обычно для этого достаточно введения (или существования) в E топологии. Мы в дальнейшем ограничимся важнейшим случаем, когда E является нормированным пространством. Итак, мы предполагаем, что E является линейным нормированным пространством, функционал Φ определен на подмножестве $G \subset E$ и

$$x_0 \to \min_G \Phi. \tag{1.1.4}$$

Предполагая последнее (что x_0 — точка минимума), мы ставим вопрос о необходимых условиях минимума. Для выяснения общей вариационной идеи предположим вначале, что G совпадает с E.

Пусть h — произвольный вектор из E. Рассмотрим скалярную функцию $\varphi_h(\lambda) \equiv \Phi(x_0 + \lambda h)$. Из (1.1.4) следует, что значение $\lambda = 0$ дает минимум $\varphi_h(\lambda)$. Если при этом функция $\varphi_h(\lambda)$ окажется дифференцируемой в нуле, то должно быть $\frac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)\big|_{\lambda=0} = 0$. Проведенное рассуждение справедливо при каждом h.

Определение 1.1.1. *Пусть для фиксированной точки $x^* \in E$ и любого вектора $h \in E$ соответствующая функция $\varphi_h(\lambda) \equiv \Phi(x^* + \lambda h)$ дифференцируема в нуле. Тогда функционал Φ мы будем называть дифференцируемым по Лагранжу в точке x^*, а определяемый равенством $\varphi_h'(0) = \delta\Phi(x^*)h$ функционал $\delta\Phi(x^*)$ будем называть первой вариацией (или просто вариацией) Φ в точке x^* (вариация по Лагранжу).*

Из сказанного выше следует, что если $x_0 \to \min\limits_G \Phi$ и если существует $\delta\Phi(x_0)$, то $\delta\Phi(x_0)$ — тождественно нулевой функционал, т. е.

$$\delta\Phi(x_0)h = 0 \quad (h \in E). \tag{1.1.5}$$

Полученное равенство (1.1.5) является необходимым условием (1.1.4). Использование его для поиска точки минимума требует, во-первых, умения вычислять $\delta\Phi(x)$ и вдобавок — умения избавляться от произвола в выборе h в равенстве (1.1.5). Умение решать оба вопроса определяется вариационной техникой, обсуждаемой далее.

В реальных ситуациях рассмотренный выше случай совпадения G с E встречается достаточно редко. Можно ли перенести условие (1.1.5) на более общий случай, когда G является *правильной* частью E? Рассмотрим наиболее важный случай, когда G является линейным многообразием.

Определение 1.1.2. *Множество $G \subset E$ называется линейным многообразием, если вместе с каждой парой точек x_1, $x_2 \in G$ оно содержит всю прямую, проходящую через эти точки, т. е. $x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \in G$ при всех $\lambda \in R$.*

Простейший пример линейного многообразия — любое линейное подпространство, например — нулевая гиперплоскость $N(l)$ любого линейного на E функционала $l \in E^*$, т. е. $N(l) = \{x : l(x) = 0\}$. Более общий пример — «сдвинутое подпространство», когда

$$G = E_0 + x_0 = \Big\{h + x_0 : h \in E_0\Big\}, \tag{1.1.6}$$

где E_0 — линейное подпространство. Оказывается, верен и обратный факт, т. е. каждое линейное многообразие можно представить в предыдущем виде (проверьте сами).

Задача 1.1.1. *Покажите, что пересечение линейных многообразий есть линейное многообразие.*

Задача 1.1.2. *Пусть $l_1, l_2, \dots, l_k$ — линейные на E функционалы. Доказать, что при любом фиксированном наборе $c_1, c_2, \dots, c_k$ из R множество $G = \{x : l_i(x) = c_i, i = \overline{1,k}\}$ является линейным многообразием.*

Задача 1.1.3. *Пусть G — линейное многообразие. Тогда линейное подпространство E_0, связанное с G равенством* (1.1.6)*, единственно и не зависит от x_0. (Доказать.)*

Подпространство E_0, связанное с линейным многообразием G равенством (1.1.6), будем обозначать $N(G)$ и называть подпространством, параллельным G.

Теорема 1.1.1 (общая теорема Ферма). *Пусть G — линейное многообразие и $x_0 \to \min\limits_G \Phi$. Пусть Φ дифференцируем по Лагранжу в точке x_0. Тогда*

$$\delta\Phi(x_0)h = 0 \qquad (\forall h \in N(G)). \tag{1.1.7}$$

В свете вышеизложенного, доказательство достаточно очевидно. В самом деле, $x_0 \in G$ и для любого $h \in N(G)$ все точки $x_0 + \lambda h$ $(\lambda \in R)$ также принадлежат G. Поэтому Φ определен во всех этих точках и $\lambda = 0$ является точкой минимума функции $\varphi_h(\lambda) \equiv \Phi(x_0 + \lambda h)$, которая по предположению дифференцируема в этой точке, и, следовательно, $\varphi_h'(0) = 0$ для любого $h \in N(G)$, что и означает (1.1.7).

Дальнейшие несколько задач анализируются с помощью этой теоремы.

1.1.2. Идентификация некоторых линейных многообразий

Применение теоремы Ферма требует исследования равенства

$$\delta\Phi(x)h = 0, \tag{1.1.8}$$

справедливого для любого h из некоторого подпространства N, причем относительно x равенство (1.1.8) должно рассматриваться как уравнение. Как избавиться от произвола $h \in N$ в (1.1.8)? Мы обсудим этот вопрос в важнейшем для приложений случае, когда $\delta\Phi(x)h$ оказывается по h линейным (т. е. аддитивным и однородным) функционалом, а N является пересечением конечного числа гиперплоскостей линейных функционалов.

Теорема 1.1.2. *Пусть E — линейное пространство и $l_0, l_1, \dots, l_m$ — линейные на E функционалы. Пусть*

$$l_0(h) = 0 \tag{1.1.9}$$

для любого $h \in E$, удовлетворяющего одновременно всем равенствам

$$l_i(h) = 0 \qquad (i = \overline{1,m}). \tag{1.1.10}$$

Тогда l_0 есть линейная комбинация остальных l_i, т. е. существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ такие, что

$$l_0(h) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_i(h) \qquad (h \in E). \tag{1.1.11}$$

Доказательство.

Если $m = 1$ и функционал l_1 тождественно равен нулю на всем пространстве E, то и $l_0(h) \equiv 0$ на E. В этом случае теорема очевидна. Без ограничения общности можно считать, что все функционалы l_i в условиях (1.1.10) линейно независимы, т. к. в противном случае в (1.1.10) мы можем выбросить «лишние» условия, порождаемые функционалами, линейно выражающимися через остальные. Дальнейшее доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 1.1.1. *Пусть $l_1, l_2, \dots, l_m$ — линейно независимые на E функционалы. Тогда существуют элементы $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ такие, что* $\det \|l_i(x_k)\|_1^m \neq 0$.

Доказательство проведем индукцией по m. При $m = 1$ $\det\|l_i(x_k)\| = l_1(x_1)$, причем l_1 не может обращаться в нуль на всем пространстве, поэтому наверняка существует $x_1 \in E$, для которого $l_1(x_1) \neq 0$.

Пусть теперь утверждение леммы справедливо для любого $m \leqslant n$. Пусть заданные на E функционалы $l_1, \dots, l_{n+1}$ линейно независимы. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — такие элементы из E, что $\det\|l_i(x_k)\|_1^n = \Delta_n \neq 0$. Такой набор $\{x_i\}_1^n$ существует по предположению индукции. Беря произвольный элемент $x_{n+1} \in E$, рассмотрим определитель $\Delta_{n+1}(x_{n+1}) = \det\|l_i(x_k)\|_1^{n+1}$. Раскрывая этот определитель по последнему столбцу, т. е. представляя его в виде линейной комбинации элементов $l_1(x_{n+1})$, $l_2(x_{n+1})$, …, $l_{n+1}(x_{n+1})$, получим, как легко видеть, что

$$\Delta_{n+1}(x_{n+1}) = \Delta_n l_{n+1}(x_{n+1}) + \sum_{1}^{n} \alpha_i l_i(x_{n+1}), \tag{1.1.12}$$

где величины α_i не зависят от x_{n+1}, т. е. фиксированы для взятых $x_1, \dots, x_n$ и $l_1, \dots, l_{n+1}$. И если бы утверждение леммы при $m = n + 1$ было бы неверным, то $\Delta_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ для любого $x_{n+1} \in E$. Но тогда из равенства (1.1.12) следовало бы $\Delta_n l_{n+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i l_i = 0$, причем $\Delta_n \neq 0$, что противоречит линейной независимости набора $l_1, \ldots, l_{n+1}$. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, обозначим через $x_1, \ldots, x_m$ существующий по лемме набор, для которого

$$\Delta_m = \det \|l_i(x_k)\|_1^m \neq 0. \tag{1.1.13}$$

Для произвольного элемента $x \in E$ поставим вопрос о существовании набора коэффициентов $\mu_1, \ldots, \mu_m$ таких, что элемент

$$h = x - \sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k \tag{1.1.14}$$

удовлетворяет всем равенствам (1.1.10). Это значит, что числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$ должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$l_i(x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k l_i(x_k) = 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

определитель которой в силу (1.1.13) отличен от нуля и которая, следовательно, однозначно разрешима. Решения ее линейно выражаются через $l_i(x)$, так как

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ki} l_i(x) \quad (k = \overline{1, m}), \tag{1.1.15}$$

где γ_{ki} — элементы матрицы, обратной к $\|l_i(x_k)\|_1^m$. Подставляя найденные μ_k в (1.1.14), будем иметь по условию $[(1.1.10) \to (1.1.9)]$ теоремы, что

$$l_0(x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k l_0(x_k) = 0,$$

откуда с учетом (1.1.15) получаем

$$l_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_{ki} l_0(x_k) \right) l_i(x),$$

что и означает (1.1.11) при $\lambda_i = \gamma_{1i} l_0(x_1) + \cdots + \gamma_{mi} l_0(x_m)$. Теорема доказана.

Простым следствием доказанной теоремы является классическая

Теорема 1.1.3 (лемма Дюбуа–Реймона). *Пусть $A(t)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, удовлетворяющая равенству*

$$\int_a^b A(t)h(t)dt \equiv 0$$

для всех $h \in C^{(k)}[a, b]$, для которых $\int_a^b h(t)dt = 0$. Тогда $A(t) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство.

Рассматривая функционалы

$$l_0(h) = \int_a^b A(t)h(t)dt, \qquad l_1(h) = \int_a^b h(t)dt,$$

имеем в силу предыдущей теоремы, что $l_0(h) = \lambda_1 l_1(h)$, т. е.

$$\int_a^b [A(t) - \lambda_1] h(t)dt = 0 \qquad (h \in C^{(k)}[a, b]).$$

В силу произвольности h очевидно, что $[A(t) - \lambda_1] \equiv 0$. Более строгое объяснение основано на следующей классической лемме.

Лемма 1.1.2. (Лемма Лагранжа.) *Пусть $A(t)$ — кусочно-непрерывная на $[a, b]$ функция и*

$$\int_a^b A(t)h(t)dt = 0 \tag{1.1.16}$$

для любой $h \in C^{\infty}[a, b]$, удовлетворяющей конечному набору условий вида

$$\sum_{k,i} \alpha_{ik}^{\nu} h^{(i)}(\xi_k) = 0 \quad (\nu = \overline{1, N}) \tag{1.1.17}$$

для фиксированного набора $\xi_1, \ldots, \xi_m$ из $[a, b]$. Тогда $A(t) \equiv 0$.

Доказательство.

В предположении противного существует точка на $[a, b]$, в которой $A(t) \neq 0$. Но тогда, в силу непрерывности $A(t)$, существует и некоторый интервал $\Omega = (\eta_0, \eta_1)$, на котором $A(t)$ не имеет нулей, т. е. или строго положительна, или строго отрицательна. Это свойство сохраняется, если мы интервал Ω сузим так, чтобы он не содержал точек ξ_k. Возьмем в $C^\infty[a,b]$ функцию $h_0(t)$, которая строго положительна в Ω и тождественно равна нулю вне Ω. В качестве такой функции можно, например, взять «шапочку». Для этой функции все условия (1.1.17) выполняются очевидным образом. В то же время для этой функции $\int_a^b A(t)h_0(t)\,dt = = \int_\Omega A(t)h_0(t)\,dt$, причем последний интеграл отличен от нуля, так как его подынтегральное выражение на Ω не имеет нулей. Полученное противоречие с условием (1.1.16) доказывает лемму.

Доказанные в этом параграфе теоремы 1.1.2 и 1.1.3 и последняя лемма будут играть в дальнейшем принципиальную роль, позволяя реализовывать в приложениях абстрактную теорему Ферма.

1.2. Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами)

Рассматривается функционал

$$\Phi(x) = \int\limits_a^b F(t,x,x')\,dt. \tag{1.2.1}$$

Здесь и далее применяется сокращенная запись, при которой в корректном виде (1.2.1) понимается так: $\Phi(x(t)) = \int_a^b F(t,x(t),x'(t))\,dt$. При этом у функции трех переменных F, определяемой на $[a,b]\times R\times R$, мы сохраним за второй и третьей переменной обозначения x и x' (если это не приведет к недоразумению).

Функционал (1.2.1) естественно рассматривать лишь на дифференцируемых на $[a,b]$ функциях. Ниже обсуждается вопрос о его минимуме на множестве функций, удовлетворяющих условиям

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \tag{1.2.2}$$

называемым условиями закрепления концов. Эти условия выделяют соответствующее множество G для интересующей нас задачи $\Phi \to \min\limits_G$.

1.2.1. Уравнение Эйлера

Чтобы не затенять сути дела, мы будем предполагать, что функция F «достаточно хорошая», т. е. она обладает той степенью регулярности (гладкостью производных), которая нам потребуется в выкладках.

Найдем $\delta\Phi(x_0)h$ для произвольной $x_0 \in C^1[a,b]$. По определению

$$\delta\Phi(x_0)h = \frac{d}{d\lambda}\,\Phi(x_0+\lambda h)\big|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\int\limits_a^b F(t,x_0(t)+\lambda h(t),x_0'(t)+\lambda h'(t))\,dt\Big|_{\lambda=0}.$$

Подынтегральное выражение в силу гладкости F равномерно по t, дифференцируемо по λ, поэтому и соответствующий интеграл также дифференцируем по λ, как по параметру, и дифференцирование можно переносить под знак интеграла. Поэтому, применяя известное из математического анализа правило дифференцирования сложной функции, мы получаем

$$\delta\Phi(x_0)h = \int\limits_a^b [F_x h + F_{x'} h']\,dt. \tag{1.2.3}$$

Здесь и далее для сокращения мы опускаем аргументы у рассматриваемых функций, полагая при этом

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}F(t,x_0(t),x_0'(t)), \quad F_{x'} = \frac{\partial}{\partial x'}F(t,x_0(t),x_0'(t)).$$

Легко заметить, что определяемый формулой (1.2.3) функционал линеен по h. Для применения общей теоремы Ферма необходимо знать множество $N(G)$. Как легко видеть из (1.2.2) (проверьте), $N(G)$ состоит из тех функций $h \in C^1[a,b]$, которые удовлетворяют равенству

$$h(a) = h(b) = 0. \tag{1.2.4}$$

Все такие функции мы назовем допустимыми, и если $x_0(t)$ дает минимум Φ при условиях (1.2.2), то

$$\int\limits_a^b [F_x h + F_{x'} h']\,dt = 0 \tag{1.2.5}$$

для любой допустимой $h(\cdot)$, т. е. для любой $h \in C^1[a,b]$, удовлетворяющей (1.2.4).

Можно для отыскания $x_0(\cdot)$ $\big($напомним, что $x_0(\cdot)$ скрыта в обозначениях вида $F_x = \dfrac{\partial}{\partial x}F(t, x_0(t), x_0'(t))\big)$ избавиться в (1.2.5) от произвола $h \in N(G)$. Обычно это делается так. Второе слагаемое в (1.2.5) интегрируется по частям:

$$\int\limits_a^b F_{x'}h'\,dt = \int\limits_a^b F_{x'}\,dh = [F_{x'}h]_a^b - \int\limits_a^b h\frac{d}{dt}(F_{x'})\,dt. \tag{1.2.6}$$

Внеинтегральные члены в силу (1.2.4) должны равняться нулю. В проведенной нами выкладке мы воспользовались равенством $dF_{x'} = \dfrac{d}{dt}(F_{x'})\,dt$, которое справедливо лишь при условии дифференцируемости по t функции $F_{x'} = F_{x'}(t, x_0(t), x_0'(t))$. Последнее условие отнюдь не следует из регулярности $F_{x'}$. Проведенные нами рассуждения справедливы, например, при дополнительном предположении существования и непрерывности второй производной $x_0''(t)$. Подставляя теперь (1.2.6) в (1.2.5), получим

$$\int\limits_a^b \left[F_x - \frac{d}{dt}F_{x'}\right] h dt = 0 \quad (h \in N(G)). \tag{1.2.7}$$

Отсюда, в силу произвольности h, по лемме Лагранжа

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0. \tag{1.2.8}$$

Равенство (1.2.8), которому тождественно удовлетворяет функция $x_0(t)$, может рассматриваться как уравнение относительно этой функции. Нами фактически доказана следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть функция F в* (1.2.1) *достаточно регулярна. Пусть функция $x_0(t)$, дающая минимум Φ при условиях* (1.2.2)*, дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Тогда она удовлетворяет уравнению Эйлера* (1.2.8).

Любое решение уравнения Эйлера называют экстремалью.

Если раскрыть производную по t в уравнении (1.2.8), то мы получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$F_x - F_{x't} - F_{x'x}x_0'(t) - F_{x'x'}x_0''(t) = 0.$$

Доказанная выше теорема сводит поиск $x_0(t)$ к решению дифференциального уравнения при дополнительных условиях (1.2.2), т. е. к решению двухточечной краевой задачи.

Пример 1.2.1. При условиях $x(0) = 1$, $x(1) = 0$ найти экстремали функционала

$$\int\limits_0^1 (x'^2 - 2tx)\,dt.$$

Здесь $F(t, x, x') = x'^2 - 2tx$. Поэтому $F_x = -2t$ и $F_{x'} = 2x'$. Уравнение Эйлера в данном случае $-2t - (2x')' = 0$, что равносильно $x'' = -t$.

Его общее решение имеет вид $x(t) = -\dfrac{t^3}{6} + Ct + C_1$. Исходным краевым условиям удовлетворяет только одно: $x_0(t) = -\dfrac{1}{6}(t^3 + 5t - 6)$.

Пример 1.2.2. При условиях $x(a) = A, x(b) = B$ найти экстремали функционала

$$\Phi(x) = \int\limits_a^b (x^2 + 2txx')\,dt.$$

Так как здесь $F_x = 2x + 2tx'$ и $\dfrac{d}{dt}(F_{x'}) = \dfrac{d}{dt}(2tx) = 2x + 2tx'$, то уравнение Эйлера превращается в тождество $0 = 0$, которое означает, что решением уравнения Эйлера является любая функция из $C^1[a, b]$. Возникающее здесь недоумение объясняется тем (легко проверяемым обстоятельством), что под интегралом у $\Phi(x)$ стоит полный дифференциал, т. е. $\Phi(x) = \displaystyle\int\limits_a^b d(tx^2)$, вследствие чего интеграл, рассматриваемый как криволинейный вдоль графика $x(t)$, не зависит от пути интегрирования. Поэтому $\Phi(x) \equiv \mathrm{const}$ на рассматриваемом линейном многообразии функций с закрепленными концами.

1.2.2. Простейшие первые интегралы уравнения Эйлера

Рассмотрим ситуацию, когда функция от $F(t, x, x')$ не зависит от одной из переменных.

1) $F(t, x, x') \equiv F(x, x')$. В этом случае первый интеграл определяется равенством

$$F - x'F_{x'} = \mathrm{const},$$

проверяемым непосредственно:

$$0 \equiv \frac{d}{dt}[F - x'F_{x'}] = F_x x' + F_{x'}x'' - x''F_{x'} - x'\frac{d}{dt}F_{x'} =$$

$$= x'\left[F_x - \frac{d}{dt}F_{x'}\right].$$

2) $F(t, x, x') \equiv F(t, x')$. Тогда $F_x \equiv 0$, и первый интеграл принимает вид $F_{x'} \equiv \text{const}$.

3) $F(t, x, x') \equiv F(t, x)$. Решение уравнения Эйлера определяется как неявная функция из $F_x(t, x) = 0$, которая, вообще говоря, не удовлетворяет одновременно обоим краевым условиям.

Пример 1.2.3. Задача о брахистохроне. Среди плоских кривых, соединяющих две данные точки, найти ту, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, материальная точка соскользнет за кратчайшее время.

Введем систему координат. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ материальная точка имела координаты $(0, 0)$; в конечный момент времени $t = T$ — координаты (x_1, y_1) (считаем, что $y_1 > 0$, т. е. ось y направлена вниз, а также что $x_1 > 0$). Искомая кривая будет иметь вид $y = y(x)$. Тогда при $t = 0$ $y(0) = 0$; при $t = T$ $y(x_1) = y_1$, т. е. условия закрепления концов

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{1.2.9}$$

Поскольку скорость можно определить как $v = \dfrac{ds}{dt}$, отсюда $dt = \dfrac{1}{v}\,ds$. Тогда время спуска

$$T = \int_0^T dt = \int_\gamma \frac{ds}{v},$$

где ds — дифференциал дуги, γ — график кривой $y = y(x)$. Мы получили криволинейный интеграл I типа. Так как кривая задана в явном виде, то $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Поэтому

$$T = \int_0^{x_1} \frac{1}{v}\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Выразим v через x и y. По закону сохранения энергии $\dfrac{mv^2}{2} - mgy = C_0 (= \text{const})$, где $\dfrac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия, $-mgy$ — потенциальная энергия силы тяжести. Так как $y(0) = 0$, $v(0) = 0$, то $C_0 = 0$, откуда $-mgy + \dfrac{mv^2}{2} = 0$. Значит, $v = \sqrt{2gy}$. Поэтому

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\,dx.$$

Таким образом, задача об отыскании кривой наискорейшего спуска свелась к задаче об исследовании на минимум функционала (константа $1/\sqrt{2g}$ не влияет на поиск точки минимума)

$$\Phi(y) = \int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\,dx.$$

Подынтегральная функция не зависит явно от x, поэтому можно воспользоваться следствием уравнения Эйлера — первым интегралом: $F - y'F_{y'} = C$, т. е.

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} - y'^2\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C.$$

Выражая y' через y, получим

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{C^2 y} - 1}.$$

Откуда $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{C^2 y} - 1}} = \int dx = x + C_1$. После подстановки $y = \dfrac{1}{C^2}\sin^2\tau$, $dy = \dfrac{\sin 2\tau}{C^2}\,d\tau$ получаем

$$\frac{2}{C^2}\int \sin^2\tau\,d\tau = \frac{1}{C^2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2\tau\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{C^2}\left(\tau - \frac{1}{2}\sin 2\tau\right) = x + C_1.$$

Таким образом, кривой наискорейшего спуска является циклоида, уравнение которой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2C^2}[2\tau - \sin 2\tau] + C_1, \\ y = \dfrac{1}{2C^2}[1 - \cos 2\tau]. \end{cases}$$

Постоянные C и C_1 могут быть найдены из условий (1.2.9).

1.2.3. Теорема Дюбуа–Реймона

Проведенное выше обоснование уравнения Эйлера страдает одним существенным недостатком — предположением о том, что неизвестная нам (и подлежащая отысканию) точка экстремума $x_0(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a,b]$. Оказывается, это предположение, вообще говоря, излишне.

Теорема 1.2.2. *Пусть*

$$x_0(\cdot) \to \min_{x\in G} \int_a^b F(t,x,x')\,dt, \tag{1.2.10}$$

где F — достаточно регулярна и $G = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = A, x(b) = B\}$. Тогда $x_0(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0. \tag{1.2.11}$$

Замечание 1.2.1. Отличие этой формулировки от предыдущей теоремы заключается в том, что во втором слагаемом уравнения Эйлера производная $\dfrac{d}{dt}F_{x'}(t,x_0(t),x_0'(t))$ не раскрыта, т. е. дифференцируемость требуется не от $x_0'(t)$, а от $F_{x'}(t,x_0(t),x_0'(t))$. Последнее же свойство оказывается справедливым и без предварительного предположения о существовании x_0''.

Доказательство.

Применяя к задаче (1.2.10) абстрактную теорему Ферма, получаем, как и ранее, что

$$\int_a^b [F_x h + F_{x'}h']\,dt = 0 \qquad (h \in N(G)), \tag{1.2.12}$$

где $N(G)$ — множество функций, удовлетворяющих условиям

$$h(a) = h(b) = 0 \qquad (h \in C^1[a,b]). \tag{1.2.13}$$

Преобразуем первое слагаемое в (1.2.12) интегрированием по частям, полагая

$$\int_a^b F_x\,ds = M(t); \tag{1.2.14}$$

имеем

$$\int_a^b F_x h\,dt = \int_a^b h\,dM(t) = [hM]_a^b - \int_a^b M(t)h'(t)\,dt.$$

Внеинтегральный член здесь равен нулю в силу (1.2.13). Подставляя полученное выражение в (1.2.12), имеем

$$\int_a^b [-M + F_{x'}]h'\,dt = 0 \qquad (\forall h \in N(G)).$$

Заменяя здесь h' через g, т. е. полагая $h' \equiv g$, получим

$$\int_a^b [-M + F_{x'}]g\,dt = 0,$$

причем, в силу условия (1.2.13):

$$\int_a^b g(t)\,dt = 0. \tag{1.2.15}$$

В силу произвольности таких $g \in C[a,b]$ и вследствие леммы Дюбуа–Реймона имеем из (1.2.15), что $-M + F_{x'} = \mathrm{const}$, т. е. $F_{x'} = M + \mathrm{const}$. Из (1.2.14) следует, что M дифференцируема, поэтому дифференцируема и функция $F_{x'} = F_{x'}(t,x_0(t),x_0'(t))$, но тогда

$$\frac{d}{dt}[-M + F_{x'}] = \frac{d}{dt}\mathrm{const} = 0.$$

Раскрывая здесь $\dfrac{d}{dt}M$ согласно (1.2.14), имеем (1.2.11). Теорема доказана.

1.2.4. Гладкость экстремалей

Развивая предыдущие соображения, попробуем ответить на вопрос: существует ли у экстремалей вторая производная, коль скоро для нее заведомо существует квазипроизводная $\dfrac{d}{dt}F_{x'}(t, x_0(t), x_0'(t))$? Обозначим временно

$$F_{x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) = R(t). \tag{1.2.16}$$

Существование в точке τ производной $\left(\dfrac{d}{dt}R\right)(\tau)$ означает существование предела

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta T} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(\tau + \Delta t) - R(\tau)}{\Delta t}. \tag{1.2.17}$$

Согласно (1.2.16)

$$\Delta R = F_{x'}(\tau + \Delta t, x_0(\tau + \Delta t), x_0'(\tau + \Delta t)) - F_{x'}(\tau, x_0(\tau), x_0'(\tau),$$

откуда в силу регулярности F, применим формулу о конечном приращении

$$\Delta R = \widetilde{F}_{x't}\Delta t + \widetilde{F}_{x'x} \cdot (x_0(\tau + \Delta t) - x_0(\tau)) +$$
$$+ \widetilde{F}_{x'x'} \cdot (x_0'(\tau + \Delta t) - x_0'(\tau)).$$

Волна сверху над частными производными означает здесь, что они вычислены при промежуточных значениях аргументов $(\tau + \Theta\Delta t, x_0(\tau) + \Theta\Delta x_0, x_0'(\tau) + \Theta\Delta x_0')$, где обозначено $\Delta x_0 = x_0(\tau + \Delta t) - x_0(\tau)$; $\Delta x_0' = x_0'(\tau + \Delta t) - x_0'(\tau)$. Таким образом,

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \widetilde{F}_{x't} + \widetilde{F}_{x'x} \cdot \frac{\Delta x_0}{\Delta t} + \widetilde{F}_{x'x'} \cdot \frac{\Delta x_0'}{\Delta t}. \tag{1.2.18}$$

По условию предел этой суммы, совпадающий с (1.2.17), наверняка существует при $\Delta t \to 0$. В силу непрерывности вторых частных производных F функции $\widetilde{F}_{x't}$, $\widetilde{F}_{x'x}$, $\widetilde{F}_{x'x'}$ стремятся при $\Delta t \to 0$ соответственно к $F_{x't}$, $F_{x'x}$, $F_{x'x'}$. При этом, очевидно, $\dfrac{\Delta x_0}{\Delta t} \to x_0'(\tau)$, следовательно, в (1.2.18) существуют пределы при $\Delta t \to 0$ у первых двух слагаемых. Поэтому наверняка существует и

$$\lim_{\Delta t \to 0} \widetilde{F}_{x'x'} \frac{\Delta x_0'}{\Delta t}. \tag{1.2.19}$$

А так как $\dfrac{\Delta x_0'}{\Delta t} = \left[\widetilde{F}_{x'x'} \dfrac{\Delta x_0'}{\Delta t}\right] \cdot \left[\dfrac{1}{\widetilde{F}_{x'x'}}\right]$, то предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x_0'}{\Delta t} = x_0''(\tau)$ в силу существования предела (1.2.19) наверняка существует, если существует предел $\dfrac{1}{\widetilde{F}_{x'x'}}$, т. е. если $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \widetilde{F}_{x'x'} = F_{x'x'}(\tau, x_0(\tau), x_0'(\tau)) \neq 0$. Таким образом, нами доказана

Теорема 1.2.3. *Пусть $x_0(t) \in C^1[a, b]$ дает экстремум в задаче с закрепленными концами. Тогда $x_0(t)$ имеет вторую производную в каждой точке $\tau \in [a, b]$, в которой $F_{x'x'}(\tau, x_0(\tau), x_0'(\tau)) \neq 0$.*

Точки τ, в которых это условие нарушается, называют сингулярными точками. Если раскрыть уравнение Эйлера, развернув член $\dfrac{d}{dt}F_{x'}$, то выделенное в явном виде слагаемое $F_{x'x'}x''$ со второй производной обращается в нуль, т. е. каждое уравнение Эйлера, имея, вообще говоря, второй порядок, в каждой сингулярной точке вырождается в дифференциальное уравнение первого порядка. Такие случаи требуют особо тонкого анализа, далеко выходящего за пределы учебного курса. Поэтому мы в дальнейшем, как правило, будем предполагать выполненным условие регулярности

$$F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) \neq 0 \quad (t \in [a, b]).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.2. В дальнейшем при обосновании аналогов уравнения Эйлера в более общих задачах мы будем для простоты пользоваться схемой вывода, предполагающей существование второй производной экстремалей. Аналоги теоремы Дюбуа–Реймона могут быть установлены подобным образом, но мы их оставим за пределами внимания в виду их большей трудоемкости.

1.3. Задача Больца

Так называют задачу, если функционал содержит внеинтегральный член.

Рассмотрим функционал вида

$$\Phi(x) = \int_0^1 F(t, x, x')\,dt + L(x(0), x(1)),$$

где $L(x_0, x_1)$ — дифференцируемая функция двух переменных. Нас интересует задача $\Phi \to \underset{C^1[0,1]}{\mathrm{extr}}$. Аналогично простейшей задаче имеем

$$\begin{aligned}\delta\Phi(x)h = \int\limits_0^1 [F_x h + F_{x'}h']\,dt + \\ + L_{x_0}(x(0),x(1))\cdot h(0) + L_{x_1}(x(0),x(1))\cdot h(1) = \\ = \int\limits_0^1 [F_x - \frac{d}{dt}F_{x'}]h\,dt + \Big[F_{x'}\Big|_{t=1} + L_{x_1}\Big]\cdot h(1) + \\ + \Big[-F_{x'} = \Big|_{t=0} + L_{x_0}\Big]\cdot h(0).\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Применяя принцип Ферма, т. е. приравнивая полученное выражение к нулю, воспользуемся произволом функции $h(t)$, а именно ограничимся лишь функциями $h(t)$ такими, что $h(0) = h(1) = 0$. На множестве таких функций из $C^1[0,1]$ мы имеем $\int_0^1 [F_x - \frac{d}{dt}F_{x'}]h\,dt = 0$, откуда вследствие леммы Лагранжа вытекает, что искомая функция должна обращать квадратные скобки в нуль, т. е. удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0. \tag{1.3.2}$$

Но тогда первая вариация (1.3.1) должна приобрести вид $\delta\Phi(x)h = \Big[F_{x'}\Big|_{t=1} + L_{x_1}\Big]\cdot h(1) + \Big[-F_{x'}\Big|_{t=0} + L_{x_0}\Big]\cdot h(0)$. Приравнивая ее к нулю и пользуясь произвольностью функции $h(t)$, точнее, произвольностью чисел $h(0), h(1)$, имеем

$$\Big[F_{x'}\Big|_{t=1} + L_{x_1}\Big] = 0, \quad \Big[-F_{x'}\Big|_{t=0} + L_{x_0}\Big] = 0. \tag{1.3.3}$$

Тем самым мы получили два краевых условия, дополняющих уравнения Эйлера. Любопытен случай, когда $L(x_0,x_1) \equiv 0$, т. е. когда исходная задача принимает вид

$$\int\limits_0^1 F(t,x,x')\,dt \to \underset{C^1[0,1]}{\mathrm{extr}}.$$

Эту задачу называют задачей со свободными концами. Она отличается от простейшей (основной) задачи вариационного исчисления отсутствием

условий закрепления концов. В этом случае согласно (1.3.3) уравнение Эйлера дополняется условиями вида

$$F_{x'}|_{t=0}; \quad F_{x'}|_{t=1} = 0.$$

Замечание 1.3.1. В лемме Лагранжа можно считать, что $A(t)$ — кусочно-непрерывна.

1.3.1. Негладкие экстремали

Функционал

$$\Phi(x) = \int\limits_0^1 F(t,x,x')\,dt + L(x(\xi_0), x(\xi_1), \ldots, x(\xi_{n+1})),$$

$(0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{n+1} = 1)$ рассматривается на пространстве E — непрерывных на $[0,1]$ функций с непрерывными при $t \neq \xi_i$ производными. Решение задачи $\Phi \to \underset{E}{\mathrm{extr}}$ удовлетворяет уравнению Эйлера на каждом (ξ_i, ξ_{i+1}) и дополнительным условиям

$$\begin{aligned}&F_{x'}\Big|_{t=0} - L_{x_0} = 0, \quad F_{x'}\Big|_{t=1} + L_{x_{n+1}} = 0,\\ &\Delta F_{x'}\Big|_{t=\xi_i} - L_{x_i} = 0 \qquad (i = \overline{1,n}),\end{aligned}$$

где обозначено $\Delta z(\xi) = z(\xi+0) - z(\xi-0)$. В качестве упражнения предлагаем доказать самостоятельно.

Указание. При преобразовании первой вариации слагаемое $\int_0^1 F_{x'}h'\,dt$ проинтегрировать по частям на каждом (ξ_i, ξ_{i+1}).

Пример 1.3.1. Для потенциальной энергии натянутой вдоль $[0,1]$ струны, подпертой в точках $\xi_1, \ldots, \xi_n$ пружинами, интегральный член имеет обычный вид, а энергия, накапливаемая пружинами, порождает слагаемое $L = \frac{1}{2}\sum\limits_1^n k_i u^2(\xi_i)$. Здесь k_i — коэффициент упругости i-ой пружины, $k_i u(\xi_i)$ — сила (по закону Гука) реакции пружины, причем на расстоянии $u(\xi_i)$ этой силой проделывается работа $\frac{1}{2}[k_i u(\xi_i)]\cdot u(\xi_i)$. В этом случае уравнение Эйлера $(pu')' + f = 0$ (при $t \neq \xi_i$) дополняется в точках ξ_i условиями $\Delta(pu')(\xi_i) = k_i u(\xi_i)$.

Пример 1.3.2. Если в общей задаче Больца $L \equiv 0$, а экстремум ищется в том же пространстве E функций, производные которых могут иметь разрывы в точках ξ_i, то в этих точках неизбежна обобщенная гладкость в виде равенств

$$\Delta F_{x'}|_{\xi_i} = 0.$$

1.4. Обобщения простейшей задачи

1.4.1. Задача для вектор-функций

Рассматривается функционал $\Phi(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\, dt$ на множестве G непрерывно дифференцируемых функций $x : [a,b] \to R^n$ при условиях

$$x(a) = A, x(b) = B. \tag{1.4.1}$$

Функция $F : [a,b] \times R^n \times R^n \to R^1$ предполагается достаточно гладкой. В более элементарных (координатных) обозначениях $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ и $F(t,x,x') = F(t; x_1, \ldots, x_n;\, x_1', \ldots, x_n')$. Ставится задача

$$\Phi \to \min_G. \tag{1.4.2}$$

Множество G — линейное многообразие (проверьте), соответствующее ему нулевое многообразие $N(G)$ (параллельное пространство) определяется равенствами

$$h(a) = h(b) = 0. \tag{1.4.3}$$

Аналогично простейшей задаче

$$\delta\Phi(x)h = \int_a^b \sum_1^n [F_{x_i} h_i + F_{x_i'} h_i']\, dt =$$

$$= \int_a^b \sum_1^n \left[F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'}\right] h_i\, dt + \sum_1^n [F_{x_i'} h_i]_a^b.$$

В силу (1.4.3), внеинтегральные члены равны нулю. Отсюда и из принципа Ферма следует, что решение $x(t)$ задачи (1.4.2) должно удовлетворять равенствам

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b [F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'}] h_i\, dt = 0 \tag{1.4.4}$$

для любой $h \in N(G)$. В силу произвольности h мы можем в (1.4.4) брать вектор-функции, у которых все координаты, кроме одной, есть тождественные нули. Поэтому (1.4.4) равносильно системе

$$\int_a^b \left[F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'}\right] h_i\, dt = 0 \quad (i = \overline{1,n}). \tag{1.4.5}$$

Каждое из этих равенств в силу леммы Лагранжа эквивалентно тождеству

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} = 0 \quad (i = \overline{1,n}).$$

Мы пришли, таким образом, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, дополняемой исходными краевыми условиями (1.4.1).

В рассматриваемой задаче условия (1.4.1) могут отсутствовать, в то время как функционал Φ (аналогично задаче Больца) может иметь внеинтегральный член. Соответствующий анализ, почти повторяющий рассуждения в задаче Больца, приводит к краевым условиям, заменяющим (1.4.1).

1.4.2. Задача Пуассона

Рассматривается функционал

$$\Phi(x) = \int_a^b F(t, x, x', \ldots, x^{(n)})\, dt$$

на множестве G функций из $C^{(n)}[a,b]$, удовлетворяющих равенствам

$$x^{(i)}(a) = A_i, \quad x^{(i)}(b) = B_i \quad (i = \overline{0, n-1}). \tag{1.4.6}$$

Ставится задача $\Phi \to \operatorname{extr}_G$. Предполагается достаточная гладкость решения $x(t)$ этой задачи и функции $F : [a,b] \times R^{n+1} \to R$. Первая вариация, как легко проверить, имеет вид

$$\delta\Phi(x)h = \sum_0^n \int_a^b F_{x^{(i)}} h^{(i)}\, dt \tag{1.4.7}$$

при любом h из подпространства $N(G)$, определенного в силу (1.4.6) равенствами

$$h^{(i)}(a) = h^{(j)}(b) = 0 \quad (i, j = \overline{0, n-1}). \tag{1.4.8}$$

Преобразуя в (1.4.7) i-ое слагаемое i-кратным интегрированием по частям, имеем

$$\int_a^b F_{x^{(i)}} h^{(i)}\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k-1} \left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} F_{x^{(i)}} \cdot h^{(i-k)} \right]_a^b + (-1)^i \int_a^b \frac{d^i}{dt^i} F_{x^{(i)}} h\,dt.$$

Здесь в силу (1.4.8) все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль. Подставляя полученное выражение в (1.4.7) и пользуясь принципом Ферма, имеем

$$\int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} F_{x^{(i)}} \right] h\,dt = 0,$$

откуда в силу леммы Лагранжа следует уравнение Эйлера–Пуассона

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} F_{x^{(i)}} = 0, \qquad (1.4.9)$$

дополняемое краевыми условиями (1.4.6).

Пример 1.4.1 (задача о стержне).

Стержнем называют физический континуум, отождествляемый с отрезком $[0, l]$, упругая реакция которого на деформацию $u(t)$ накапливает энергию, определяемую равенством

$$V_1(u) = \int_0^l \frac{pu''^2}{2}\,dt$$

(закон Бернулли–Эйлера). Если эта упругая деформация вызвана внешней нагрузкой интенсивности $f(t)$, то энергия, накопленная стержнем за счет внешней нагрузки, определяется, как и для струны, величиной

$$V_2(u) = \int_0^l fu\,dt.$$

Поэтому полная потенциальная энергия $V(u)$ определяется равенством

$$V(u) = V_1(u) - V_2(u) = \int_0^l \left[\frac{pu''^2}{2} - fu \right] dt$$

(V_1 и V_2 взяты с разным знаком, так как упругая реакция стержня противостоит внешней нагрузке). Если концы стержня зажаты, то для них справедливо условие

$$u(0) = u'(0) = 0; \quad u(l) = u'(l) = 0. \qquad (1.4.10)$$

В силу принципа Лагранжа реальная деформация стержня должна давать минимум в описанной задаче, которая является частным случаем задачи Пуассона. Поэтому деформация стержня должна удовлетворять уравнению

$$(pu'')'' = f$$

при краевых условиях (1.4.10).

1.4.3. Уравнение Эйлера–Остроградского

Исследуемая в этом пункте экстремальная задача определяется интегральным функционалом, задаваемым на функциях многих переменных. Специфика этой ситуации хорошо понятна на примере функции двух переменных (случай большего числа переменных рассматривается аналогично). Поэтому мы ограничиваемся изучением функционала вида

$$\Phi(x) = \iint_\Omega F(t, s, x, x_t, x_s)\,dt\,ds.$$

Область $\Omega \subset R^2$ будем считать для удобства ограниченной и выпуклой, а границу Γ этой области — непрерывной кривой.

Пусть $f : \Gamma \to R$ — заданная функция. Множество G функций $x \in \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющих на границе условию

$$x|_\Gamma = f|_\Gamma, \qquad (1.4.11)$$

является линейным многообразием. Ниже обсуждается задача $\Phi \to \operatorname*{extr}_G$. Решение $x(t, s)$ и функция F предполагаются достаточно гладкими.

Следуя прежней схеме, найдем первую вариацию

$$\delta\Phi(x) = \iint\limits_{\Omega} [F_x h + F_{x_t} h_t + F_{x_s} h_s]\, dt\, ds. \qquad (1.4.12)$$

По принципу Ферма она должна быть тождественным нулем на множестве $N(G)$ функций $h \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющих в силу (1.4.11) равенству

$$h|_{\Gamma} = 0. \qquad (1.4.13)$$

В представлении (1.4.12) второе и третье слагаемые упрощаются (снятием производных у h) интегрированием по частям в рамках двойного интеграла. Покажем, как это делается для второго слагаемого (для третьего картина абсолютно аналогична). Второе слагаемое в (1.4.12) можно записать в виде повторного интеграла

$$\iint\limits_{\Omega} F_{x_t} h_t\, dt\, ds = \int\limits_a^b \int\limits_{\alpha(s)}^{\beta(s)} F_{x_t} h_t\, dt\, ds, \qquad (1.4.14)$$

где через $\alpha(s), \beta(s)$ обозначены непрерывные на $[a,b]$ функции, с помощью которых область Ω однозначно определяется равенством $\Omega = \{(t,s) : \alpha(s) < t < \beta(s), a < s < b\}$. Другими словами, область Ω заключена между графиками кривых $t = \alpha(s)$ и $t = \beta(s)$ на $[a,b]$. Очевидно,

$$(s, \alpha(s)) \in \Gamma; \quad (s, \beta(s)) \in \Gamma. \qquad (1.4.15)$$

В (1.4.14) при каждом s внутренний интеграл преобразуем интегрированием по частям. При каждом фиксированном s по определению частных производных $\dfrac{\partial h}{\partial t}\, dt = d_t h$, поэтому

$$\int\limits_{\alpha(s)}^{\beta(s)} F_{x_t} h_t\, dt = [F_{x_t} h]_{\alpha(s)}^{\beta(s)} - \int\limits_{\alpha(s)}^{\beta(s)} h \cdot d_t F_{x_t}.$$

В силу (1.4.15) и (1.4.13) внеинтегральные члены суть нули. Поэтому (1.4.14) принимает вид

$$\iint\limits_{\Omega} F_{x_t} h_t\, dt\, ds = -\int\limits_a^b \int\limits_{\alpha(s)}^{\beta(s)} \frac{\partial}{\partial t} F_{x_t} h\, dt\, ds = -\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} F_{x_t} h\, dt\, ds.$$

Проведя аналогичные рассуждения с третьим слагаемым в (1.4.12), вместо (1.4.12) получаем

$$\delta\Phi(x)h = \iint\limits_{\Omega} \left[F_x - \frac{\partial}{\partial t} F_{x_t} - \frac{\partial}{\partial s} F_{x_s}\right] h\, dt.$$

Приравнивая $\delta\Phi(x)$ тождественно нулю на $N(G)$ и пользуясь свойством, аналогичным лемме Лагранжа, приходим к уравнению

$$F_x - \frac{\partial}{\partial t} F_{x_t} - \frac{\partial}{\partial s} F_{x_s} = 0, \qquad (1.4.16)$$

установленному Остроградским. Для этого уравнения в частных производных условия на границе (1.4.11) определяют стандартную граничную задачу Дирихле.

Задача 1.4.1. *Покажите справедливость аналога леммы Лагранжа для рассмотренного случая функций нескольких переменных.*

1.5. Условный экстремум

В задачах, обсуждавшихся выше, множество G, в котором искалась точка экстремума Φ, было линейным многообразием. В практике часто возникают задачи, в которых G нелинейно. С одним из примеров мы уже знакомы — это задача Дидоны, где G состоит из кривых, концы которых не фиксированы, а могут находиться на двух наперед заданных линиях (задача с подвижными концами). Наконец, ряд задач механики требует учета дополнительных голономных или неголономных связей, когда, например, речь идет о динамике точки, движущейся по некоторой поверхности.

Мы проведем анализ подобных задач на трех основных примерах. Метод будет применяться прежний: метод Лагранжа линеаризации по направлениям.

1.5.1. Задача с подвижными концами

На отрезке $[a,b]$ заданы две гладкие функции $A(t), B(t)$, графики которых γ_A, γ_B определяют множество концов допустимых кривых. Рассматриваемый функционал имеет вид

$$\Phi(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t, x, x')\, dt. \qquad (1.5.1)$$

Здесь точки α и β — абсциссы точек пересечения графика $x(t)$ с γ_A и γ_B, т. е.

$$x(\alpha) = A(\alpha), \quad x(\beta) = B(\beta). \tag{1.5.2}$$

Таким образом, множество G состоит из функций $x \in C^1[a,b]$, «пересекающихся» с γ_A, γ_B. Основные особенности этой задачи — переменные пределы интегрирования в (1.5.1), зависящие от $x(\cdot)$.

Лемма 1.5.1. *Пусть функция $x_0(\cdot)$ дает экстремум функционала Φ на множестве G. Пусть α_0, β_0 — соответствующие x_0 пределы интегрирования* (1.5.1)*, определяемые равенствами* (1.5.2)*. Тогда $x_0(t)$ является на α_0, β_0 экстремалью, т. е. удовлетворяет уравнению Эйлера.*

Доказательство.

Обозначим через G_0 множество функций, удовлетворяющих условиям $x(\alpha_0) = A(\alpha_0), x(\beta_0) = B(\beta_0)$. Так как G_0 содержится в G, то $x_0 \to \to \underset{G_0}{\operatorname{extr}} \Phi$. Но последняя задача — это задача с закрепленными концами, для которой требуемое свойство x_0 установлено ранее. Лемма доказана.

Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что подвижным является только правый конец, т. е. что $\alpha(x) \equiv a$. Функционал (1.5.1) принимает вид

$$\Phi(x) = \int\limits_a^\beta F(t,x,x')\,dt, \tag{1.5.3}$$

где верхний предел $\beta = \beta(x)$ определяется равенством

$$x(\beta) = B(\beta). \tag{1.5.4}$$

Для линеаризации по Лагранжу функционала (1.5.3) с учетом условия (1.5.4) нам необходимо вначале выяснить возможность линеаризации множества G функций из $C^2[a,b]$, удовлетворяющих условию (1.5.4), т. е. пересекающихся на $[a,b]$ с $B(\cdot)$.

1.5.2. Локальная линеаризация $\Phi(x)$

Пусть $x_0(\cdot)$ — фиксированная функция из G, и пусть β_0 — абсцисса точки пересечения графиков $x_0(\cdot)$ и $B(\cdot)$, т. е. $x_0(\beta_0) = B(\beta_0)$.

Пусть в этой точке

$$x_0'(\beta_0) \neq B'(\beta_0). \tag{1.5.5}$$

Лемма 1.5.2. *Для любой $h \in C^1[a,b]$ функция $x_\lambda = x_0 + \lambda h$ при достаточно малых λ принадлежит G, т. е. ее график наверняка пересекает γ_B. Более того, если через β_λ обозначить точку, определяемую равенством*

$$[x_0 + \lambda h]_{t=\beta_\lambda} = B(\beta_\lambda), \tag{1.5.6}$$

то зависимость β_λ от λ дифференцируема в точке $\lambda = 0$, причем

$$\left[\frac{d}{d\lambda}\beta_\lambda\right]_{\lambda=0} = \left[\frac{h}{B' - x_0'}\right]_{t=\beta_0}. \tag{1.5.7}$$

Доказательство.

Согласно (1.5.6) β_λ является функцией от λ, неявно определяемой из уравнения

$$x_0(\beta) + \lambda h(\beta) - B(\beta) = 0. \tag{1.5.8}$$

Воспользуемся теоремой из анализа о неявной функции. При $\lambda = 0$ значение $\beta = \beta_0$ удовлетворяет уравнению (1.5.8). Обозначим через $M(\lambda,\beta)$ левую часть (1.5.8). Тогда $\dfrac{\partial M}{\partial\lambda} = h(\beta)$, т. е. $\left.\dfrac{\partial M}{\partial\lambda}\right|_{\substack{\lambda=0\\ \beta=\beta_0.}} = h(\beta_0)$; точно так же $\dfrac{\partial M}{\partial\beta} = x_0'(\beta) + \lambda h'(\beta) - B'(\beta)$, т. е. $\left.\dfrac{\partial M}{\partial\beta}\right|_{\substack{\lambda=0\\ \beta=\beta_0.}} = x_0'(\beta_0) - B'(\beta_0)$.

В силу условия (1.5.5) последняя производная отлична от нуля, поэтому в окрестности точки $\alpha = 0, \beta = \beta_0$ существует функция β_λ, определяемая равенством (1.5.8), причем ее производная $\left[\dfrac{d}{d\lambda}\beta_\lambda\right]_{\lambda=0} = \dfrac{-\dfrac{\partial}{\partial\lambda}M(0,\beta_0)}{\dfrac{\partial}{\partial\beta}M(0,\beta_0)} = \dfrac{1}{[-x_0' + B']_{t=\beta_0}} \cdot h(\beta_0)$. Лемма доказана.

1.5.3. Условие трансверсальности

Теорема 1.5.1. *Пусть $x_0(t)$ дает экстремум в задаче с подвижным правым концом, причем β_0 определяет точку пересечения x_0 и B, т. е. $x_0(\beta_0) = B(\beta_0)$. Пусть в этой точке*

$$x_0'(\beta_0) \neq B'(\beta_0). \tag{1.5.9}$$

Тогда $x_0(\cdot)$ удовлетворяет на $[a,\beta_0]$ уравнению Эйлера, дополняемому в точке β_0 следующим краевым условием:

$$[F_{x'} \cdot (B' - x_0') + F]_{t=\beta_0} = 0. \tag{1.5.10}$$

Условие (1.5.10) называют условием трансверсальности.

Доказательство.

Для произвольного допустимого h и достаточно малого λ обозначим, как и выше, через β_λ точку, удовлетворяющую равенству

$$[x_0 + \lambda h]_{t=\beta_\lambda} = B(\beta_\lambda), \tag{1.5.11}$$

т. е. определяющую точку пересечения графиков $x_0+\lambda h$ и B. Согласно лемме 1.5.2 эта функция определена в окрестности нуля и дифференцируема в нуле. Следуя традиционной схеме, рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = \Phi(x_0 + \lambda h) = \int\limits_a^{\beta_\lambda} F(t, x_0 + \lambda h, x_0' + \lambda h')\, dt.$$

И верхний предел, и подынтегральное выражение здесь дифференцируемы по λ в точке $\lambda = 0$. Поэтому и функция φ имеет производную $\varphi'(0) = \delta\Phi(x_0)h$, вычисляемую по формуле

$$\varphi'(0) = \big[F(t, x_0 + \lambda h, x_0' + \lambda h')\big]_{\substack{t=\beta_0\\ \lambda=0.}} \cdot \left[\frac{d}{d\lambda}\beta_\lambda\right]_{\lambda=0} +$$

$$+ \int\limits_a^{\beta_\lambda|_{\lambda=0}} \frac{d}{d\lambda}[F(t, x_0 + \lambda h, x_0' + \lambda h')]_{\lambda=0}\, dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\delta\Phi(x_0)h = \left[\frac{d}{d\lambda}\beta_\lambda\right]_{\lambda=0} &\cdot F(\beta_0, x_0(\beta_0), x_0'(\beta_0)) + \\ &+ \int\limits_\alpha^{\beta_0} [F_x h + F_{x'} h']\, dt.\end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Преобразуя второе слагаемое под знаком интеграла интегрированием по частям, имеем (так как $h(a) = 0$)

$$\int\limits_a^{\beta_0} F_{x'} h'\, dt = [F_{x'} h]_{t=\beta_0} - \int\limits_a^{\beta_0} h \frac{d}{dt} F_{x'}\, dt.$$

Производя эту замену в (1.5.12) и подставляя вместо $\left[\frac{d}{d\lambda}\beta_\lambda\right]_{\lambda=0}$ соответствующее выражение из леммы 1.5.2, получаем

$$\delta\Phi(x_0)h = \frac{h(\beta_0)}{B'(\beta_0) - x_0'(\beta_0)} \cdot F(\beta_0, x_0(\beta_0), x_0'(\beta_0)) +$$

$$+ F_{x'}(\beta_0, x_0(\beta_0), x_0'(\beta_0))h(\beta_0) + \int\limits_a^{\beta_0} \left[F_x - \frac{d}{dt}F_{x'}\right] h\, dt,$$

причем под интегралом в силу леммы 1.5.1 стоит тождественный нуль, так как x_0 в силу этой леммы — экстремаль. Следовательно,

$$\delta\Phi(x_0)h = \left[\frac{F}{B' - x_0'} + F_{x'}\right]_{t=\beta_0} \cdot h(\beta_0).$$

Следуя принципу Ферма, т. е. приравнивая это выражение нулю, в силу произвольности $h(\beta_0)$, получаем

$$\left[\frac{F}{B' - x_0'} + F_x'\right]_{t=\beta_0} = 0,$$

что эквивалентно условию трансверсальности. Теорема доказана.

1.5.4. Условие Вейерштрасса–Эрдмана

Если функция $x_0(t)$ минимизирует простейший функционал и имеет кусочно-непрерывную производную, то x_0 на участках гладкости удовлетворяет уравнению Эйлера. Если ξ — одна из точек разрыва $x_0'(t)$, то в ней, как ранее установлено,

$$\Delta F_{x'}|_{t=\xi} = 0. \tag{1.5.13}$$

Оказывается, в этой точке выполняется еще одно условие:

$$\Delta[F - x_0' F_{x'}]_{t=\xi} = 0. \tag{1.5.14}$$

Эти два условия принадлежат Вейерштрассу и Эрдману. Условие (1.5.14) устанавливается сведением исходной задачи к композиции задач со свободными концами, а именно: для точки ξ и некоторого k вводится прямая $x = x_0(\xi) + kt$, рассекающая график $x_0(t)$ на две части. Каждая из этих частей минимизирует одну из задач с подвижными концами, перемещающимися по введенной прямой. Соответствующие условия трансверсальности, связанные с одним и тем же числом k , после исключения k приводят к (1.5.14).

1.5.5. Общая задача Лагранжа

Мы обсуждаем задачу $\Phi \to \min\limits_{G}$, где

$$G = \{x \in E : \psi_i(x) = C_i, \quad i = \overline{1,n}\}. \tag{1.5.15}$$

Здесь Φ, ψ_i — определенные на банаховом пространстве E функционалы; C_i — некоторые константы. Тем самым G определяется n условиями. Нами будет обоснован принцип множителей Лагранжа, согласно которому при некоторых условиях:

Если $x_0 \to \min\limits_{G} \Phi$, то x_0 при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ оказывается критической точкой для функционала $\widetilde{\Phi} = \Phi - \alpha_1\psi_1 - \alpha_2\Psi_2 - \ldots - \alpha_n\psi_n$, т. е. $\delta\widetilde{\Phi}(x_0)h$ есть нулевой функционал.

1.5.6. Линеаризация гладкого многообразия

Пусть функционалы ψ_i, определяющие множество (1.5.15), дифференцируемы по Фреше в точке x_0.

Теорема 1.5.2. *Существуют элементы $h_1, \ldots, h_n$, обладающие следующим свойством: для произвольного вектора h, удовлетворяющего равенствам*

$$\psi_i'(x_0)h = 0, \tag{1.5.16}$$

при достаточно малом λ существуют $\mu_1, \ldots, \mu_n$ такие, что

$$x_0 + \lambda h + \sum_{k=1}^{n} \mu_k h_k \in G, \tag{1.5.17}$$

причем

$$\mu_k = o(\lambda) \quad (k = \overline{1,n}). \tag{1.5.18}$$

Доказательство.

Рассмотрим вначале случай, когда все функционалы $\psi_i'(x_0)$ линейно независимы. В силу леммы 1.1.1 существуют элементы $h_1, \ldots, h_n$ такие, что для них

$$\det||\psi_i'(x_0) \cdot h_k||_1^n \neq 0. \tag{1.5.19}$$

Согласно (1.5.15) для интересующего нас включения (1.5.17) имеем

$$\psi_i(x_0 + \lambda h + \sum_1^n \mu_k h_k) = C_i \quad (i = \overline{1,n}). \tag{1.5.20}$$

Если здесь обозначить $M_i(\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n) = \psi_i(x_0 + \lambda h + \mu_1 h_1 + \ldots + \mu_n h_n)$, то вопрос о существовании соответствующих $\mu_1(\lambda), \ldots, \mu_n(\lambda)$ может быть решен в форме вопроса о существовании неявной функции $\mu(\lambda)$, определяемой системой скалярных уравнений

$$M_i(\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n) = C_i. \tag{1.5.21}$$

Так как значения $\lambda = 0, \mu_i = 0$ удовлетворяют этой системе и при этих значениях, как легко подсчитать, $\dfrac{\partial M_i}{\partial \mu_k} = \psi_i'(x_0)h_k$, то условие (1.5.19) означает применимость к (1.5.20) теоремы о неявном отображении, т. е. существование в окрестности нуля функции $\mu_i(\lambda)$. По той же теореме эти функции и дифференцируемы в нуле, так как $\dfrac{\partial M_i}{\partial \lambda}$ также существуют и определены.

По определению M_i должно быть $\dfrac{\partial M_i}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} = \psi_i'(x_0)h$. Эти производные в силу условия (1.5.16) суть нули. А потому (проверьте) и $\mu_i'(0) = 0 \quad (i = \overline{1,n})$. Остается заметить, что $\mu_i(0) = 0$.

В случае линейной зависимости набора функционалов $\{\psi_i'(x_0)\}_1^n$ достаточно те же рассуждения провести для максимального линейно независимого их поднабора. Теорема доказана.

1.5.7. Метод множителей Лагранжа

Теорема 1.5.3. *Пусть $x_0 \to \min\limits_{G} \Phi$, причем в точке x_0 существует первая вариация $\delta\Phi(x_0)$ и производные Фреше $\psi_i'(x_0)$. Тогда существуют числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$ такие, что*

$$\left[\delta\Phi(x_0) - \sum_1^n \mu_i \psi_i'(x_0)\right] h = 0, \forall (h \Big| \psi_i'(x_0)h = 0) i = \overline{1,n}. \tag{1.5.22}$$

Применение этой теоремы в реальных ситуациях производится следующим образом. Вместо исследования исходного функционала на множестве (1.5.15) с помощью неопределенных множителей $\mu_1, \ldots, \mu_n$ выписывается новый функционал $\Phi_\mu(x) = \Phi(x) - \mu_1\psi_1(x) - \ldots - \mu_n\psi_n(x)$ и разыскиваются точки, удовлетворяющие уравнению $\delta\Phi_\mu(x)h = 0$. Эти точки (решения) могут отыскиваться по стандартным схемам. Неопределенность, порождаемая зависимостью $x = x_\mu$ от параметра $\mu \in R^n$, снимается исходным условием $x_\mu \in G$, т. е. $\psi_i(x_\mu) = C_i \quad (i = \overline{1,n})$ — последние равенства дополняют (1.5.22) до замкнутой системы уравнений, позволяющих найти и соответствующие значения μ_i $(i = \overline{1,n})$.

Доказательство теоремы.

Пусть $h_1, \ldots, h_n$ — набор векторов, обеспечиваемый предыдущей теоремой. Для произвольного h, удовлетворяющего равенствам (1.5.16), обозначим $\mu_1(\lambda), \ldots, \mu_n(\lambda)$ — функции, удовлетворяющие при малых λ соотношению (1.5.17). Вектор $x_\lambda = x_0 + \lambda h + \mu_1 h_1 + \ldots + \mu_n h_n$ при достаточно малом λ находится вблизи точки x_0, поэтому $\Phi(x_\lambda) \geqslant \Phi(x_0)$ при λ из некоторой окрестности нуля. Значит, функция $\varphi(\lambda) = \Phi(x_\lambda)$ имеет в нуле минимум и дифференцируема в нуле. Поэтому $\varphi'(0) = 0$. Но

$$\varphi'(0) = \frac{d}{d\lambda}\Phi(x_0 + \lambda h + \mu_1(\lambda)h_1 + \ldots + \mu_n(\lambda)h_n)\Big|_{\lambda=0} =$$
$$= \delta\Phi(x_0)h + \sum_1^n [\delta\Phi(x_0)h_i] \cdot \mu_i'(0) = \delta\Phi(x_0)h.$$

Таким образом, $\delta\Phi(x_0)h = 0$ для любого h, удовлетворяющего всем равенствам (1.5.16). Отсюда следует в силу теоремы 1.1.2 требуемое. Теорема доказана.

1.6. Необходимые условия второго порядка

1.6.1. Вторая вариация

Напомним основное соображение, применявшееся нами при отыскании необходимых условий экстремума функционала $\Phi : E \to R$ на линейном многообразии $G \subset E$. Это соображение, восходящее к Лагранжу, заключается в скаляризации задачи: если x_0 есть точка минимума Φ на G (т. е. $x_0 \to \min\limits_G \Phi$), то нуль есть точка минимума функции $\varphi_h(\lambda) = \Phi(x_0 + \lambda h)$ для любого $h \in N(G)$. Здесь, как и ранее, $N(G)$ обозначает подпространство, параллельное G, т. е. $N(G) = G - x_0$. Применяя к высказыванию

$$0 \to \min_\lambda \varphi_h(\lambda) \tag{1.6.1}$$

скалярную теорему Ферма в предположении дифференцируемости φ в нуле, мы получали $\dfrac{d}{d\lambda}\varphi_h|_{\lambda=0} = 0$. Вводя в рассмотрение новый объект $\dfrac{d}{d\lambda}\varphi_h(0) = \delta\Phi(x_0)h$ (назвав его первой вариацией), мы получаем абстрактную теорему Ферма, а именно:

Если $x_0 \to \min\limits_G \Phi$ и если существует $\delta\Phi(x_0)$, то $\delta\Phi(\lambda_0)h$ есть тождественный нуль на $N(G)$, т. е. $\delta\Phi(x_0)h = 0$ $(\forall h \in N(G))$.

Реализация этой теоремы для конкретных интегральных функционалов привела нас как к различным вариантам уравнения Эйлера, так и к различным краевым условиям для него.

Если в анализе (1.6.1) не ограничиваться скалярной теоремой Ферма, то использование более тонкого свойства

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\varphi_h(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \geqslant 0 \quad (h \in N(G)) \tag{1.6.2}$$

может привести к новым необходимым условиям экстремума в исходной вариационной задаче. Реализации этого соображения посвящен ближайший материал.

Определение 1.6.1. *Пусть Φ — заданный на линейном пространстве E функционал. Пусть для некоторой точки $x_0 \in E$ и любого $h \in E$ функция $\varphi_h(\lambda) = \Phi(x_0 + \lambda h)$ дважды дифференцируема в нуле. Тогда функционал $\psi : E \to R$, определяемый равенством $\psi(h) = \dfrac{d^2}{d\lambda^2}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0}$, называется второй вариацией Φ в точке x_0 и обозначается через $\delta^2\Phi(x_0)h (= \psi(h))$.*

Изложенные выше соображения означают, что если $x_0 \to \min \Phi$ и если $\delta^2\Phi(x_0)$ существует, то

$$\delta^2\Phi(x_0)h \geqslant 0 \quad (\forall h \in N(G)). \tag{1.6.3}$$

Итак, (1.6.3) является необходимым условием минимума Φ в точке x_0. Реализация этого свойства для конкретного функционала требует как вычисления второй вариации $\delta^2\Phi$, так и умения эффективно анализировать в конкретных случаях само неравенство (1.6.3), сводя его к условиям, не зависящим от произвола h (как это было при обосновании уравнения Эйлера).

Для простейшего интегрального функционала

$$\Phi(x) = \int_a^b F(t, x, x')\,dt \tag{1.6.4}$$

с достаточно гладкой F вторая вариация определяется рассуждениями, полностью аналогичными первой вариации для (1.6.4):

$$\delta^2\Phi(x_0)h = \frac{d^2\Phi(x_0 + \lambda h)}{d\lambda^2}\Big|_{\lambda=0} = \int_a^b [F_{xx}h^2 + 2F_{xx'}hh' + F_{x'x'}h'^2]\,dt, \tag{1.6.5}$$

где, как и ранее, подразумевается

$$\begin{aligned} F_{xx} &= F_{xx}(t, x_0(t), x_0'(t)); \\ F_{xx} &= F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)); \qquad (1.6.6) \\ F_{xx'} &= F_{xx'}(t, x_0(t), x_0'(t)). \end{aligned}$$

Если Φ рассматривается при условии закрепления концов, т. е. на многообразии $G = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = A, x(b) = B\}$, то множество допустимых h в (1.6.3), т. е. подпространство $N(G)$, определяется равенствами $h(a) = h(b) = 0$. При таких h формулу (1.6.5) можно несколько упростить, если заметить, что

$$\int_a^b 2F_{xx'}hh'\,dt = \int_a^b F_{xx'}dh^2 =$$

$$= [F_{xx'}h^2]_a^b - \int_a^b h^2 d(F_{xx'}) = -\int_a^b \left(\frac{d}{dt}F_{xx'}\right) h^2\,dt,$$

где внеинтегральный член пропал ввиду $h \in N(G)$. Поэтому представление (1.6.5) второй вариации мы можем заменить при $h \in N(G)$ следующим:

$$\delta^2\Phi(x_0)h = \int_a^b [Ph'^2 + Qh^2]\,dt, \qquad (1.6.7)$$

где коэффициенты P, Q определяются формулами

$$P = F_{x'x'}; Q = F_{xx} - \frac{d}{dt}F_{xx'} \qquad (1.6.8)$$

и согласно (1.6.6) зависят при фиксированной $x_0(t)$ только от переменной t.

Если $x_0(t)$ дает минимум функционалу (1.6.4) на G , то согласно (1.6.3) квадратичный функционал (1.6.7) должен быть неотрицателен при всех $h \in \in N(G)$, т. е. для всех гладких h с нулями на концах. Отсюда, избавляясь от произвола h, нам удастся сделать вывод, что

$$P(t) \geqslant 0. \qquad (1.6.9)$$

При этом нам будет безразлична специфика (1.6.8) коэффициентов P и Q. Свойство (1.6.9) функционала (1.6.7) приобретает для задачи с закрепленными концами вид

$$F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) \geqslant 0 \qquad (1.6.10)$$

и носит название условия Лежандра. Основанное на (1.6.7) обоснование импликации (1.6.3)⇒(1.6.10) проводится ниже.

1.6.2. Условие Лежандра для квадратичного функционала

На множестве $N_0 = \{h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0\}$ рассмотрим квадратичный функционал

$$I(h) = \int_a^b [Ph'^2 + Qh^2]\,dt \qquad (1.6.11)$$

с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $P(t)$, $Q(t)$.

Теорема 1.6.1. *Если $I(h) \geqslant 0$ на N_0, то $P(t) \geqslant 0$ на $[a,b]$.*

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая

Лемма 1.6.1. *Для любого интервала $\Omega = (\tau_0, \tau_1) \subset [a,b]$ существует равномерно ограниченная последовательность гладких функций $h_n(t)$, тождественно равных нулю вне Ω и таких, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n'^2(t)\,dt = +\infty. \qquad (1.6.12)$$

Доказательство.

Построим сначала аналогичную последовательность в окрестности нуля, а именно на интервале $\Delta_\delta = (-\delta, \delta)$, полагая при этом $\delta = \dfrac{\tau_1 - \tau_0}{2}$.

Введем в рассмотрение функцию $g(t)$, гладкую на оси, тождественно нулевую вне Δ_δ и строго положительную внутри Δ_δ. Такая функция g наверняка существует, например, — классическая «шапочка» $w_\delta(t)$.

Так как $g(t) \not\equiv 0$ и непрерывна, то $g'(t)$ принимает строго положительные значения на некотором интервале. Точнее, наверняка существует интервал $\sigma = (\xi, \eta) \subset \Delta_\delta$ и число $\gamma_0 > 0$ такие, что выполняется неравенство

$$g'(t) \geqslant \gamma_0 \quad (t \in \sigma). \qquad (1.6.13)$$

Ненулевую меру (длину) σ обозначим через $\mu = (\eta - \xi)$.

Рассмотрим последовательность функций

$$g_n(t) = g(nt), \qquad (1.6.14)$$

определенных на всей оси R. Очевидно, $g_n(t)$ равномерно ограничены по t на Δ_δ. Исследуем производные функций g_n на интервалах $\sigma_n = \dfrac{1}{n}\sigma = (\xi_n, \eta_n)$, где обозначено $\xi_n = \dfrac{\xi}{n}, \eta_n = \dfrac{\eta}{n}$. Очевидно, $\sigma_n \in \Delta_\delta$ и мера σ_n

$$\operatorname{mes}\sigma_n = \eta_n - \xi_n = \frac{\eta - \xi}{n} = \frac{\mu}{n}. \tag{1.6.15}$$

Если $t \in \sigma_n$, то $nt \in \sigma$ и, в силу (1.6.13), $g'(nt) \geqslant \gamma_0$. Поэтому

$$g_n'(t) = \frac{d}{dt}g(nt) = ng'(nt) \geqslant n\gamma_0 \quad (t \in \sigma_n). \tag{1.6.16}$$

Пусть $t_0 = \dfrac{\tau_1 + \tau_0}{2}$. С помощью $g_n(t)$ построим интересующую нас последовательность $h_n(t)$, сдвигая $g_n(t)$ из Δ_δ на интервал Ω, т. е. в окрестность точки $t = t_0$. Для этого положим $h_n(t) = g_n(t - t_0)$. Функции h_n вместе с g_n равномерно ограничены на всей оси и, очевидно, принадлежат множеству N_0; производные h_n' на сдвинутых множествах $\Omega_n = (\xi_n + t_0, \eta_n + t_0)$ удовлетворяют в силу (1.6.16) неравенствам

$$h_n'(t) \geqslant n\gamma_0 \ \ (t \in \Omega_n). \tag{1.6.17}$$

Мера этих множеств Ω_n, очевидно, равна

$$\operatorname{mes}\Omega_n = \operatorname{mes}\sigma_n = \frac{\mu}{n}.$$

При этом $\Omega_n \subset \Omega$ при всех n, значит,

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} h_n'^2(t)\,dt \geqslant \int\limits_{\Omega_n} h_n'^2(t)\,dt \overset{(1.6.17)}{\geqslant} \\ \overset{(1.6.17)}{\geqslant} \int\limits_{\Omega_n} (n\gamma_0)^2\,dt = (n\gamma_0)^2 \operatorname{mes}\Omega_n = (n\gamma_0)^2 \cdot \frac{\mu}{n},\end{gathered} \tag{1.6.18}$$

что и доказывает (1.6.12).

Доказательство теоремы.

В предположении противного из непрерывности P следует существование числа $\varepsilon_0 > 0$ и интервала $\Omega_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a, b]$, для которых справедливо неравенство

$$P(t) \leqslant -\varepsilon_0 \quad (t \in \Omega_\delta). \tag{1.6.19}$$

В силу леммы существует равномерно ограниченная последовательность гладких функций $h_n(t)$, тождественно равных нулю вне Ω_δ, для которых выполнено (1.6.12). На этой последовательности

$$-\int\limits_a^b Ph_n'^2\,dt = \int\limits_{\Omega_\delta} (-P)h_n'^2\,dt \overset{(1.6.19)}{\geqslant} \varepsilon_0 \int\limits_{\Omega_\delta} h_n'^2\,dt \overset{(1.6.12)}{\to} +\infty.$$

Таким образом, в (1.6.11) первое интегральное слагаемое $I(h_n)$ не ограничено снизу, в то время как второе интегральное слагаемое ограничено в силу ограниченности Q и равномерной ограниченности h_n. Поэтому при достаточно больших n величина $I(h_n)$ должна принимать отрицательное значение, что противоречит условию.

1.6.3. Теорема Якоби для квадратичного функционала

На прежнем множестве N_0 гладких на $[a, b]$ функций с нулями на концах рассмотрим предыдущий функционал

$$I(h) = \int\limits_a^b [Ph'^2 + Qh^2]\,dt \tag{1.6.20}$$

с непрерывными P и Q. Согласно теореме Лежандра, если $I(h) \geqslant 0$ на N_0, то $P(t) \geqslant 0$ на $[a, b]$. Лежандр в свое время вроде бы доказал, что если

$$P(t) > 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

то верно обратное заключение, т. е. $I(h)$ неотрицателен на N_0. Чем он руководствовался?

Для произвольной достаточно гладкой функции $y(t)$ и любой $h \in N_0$

$$\int\limits_a^b d(yh^2) = [yh^2]_a^b = 0,$$

поэтому значения I не меняются, если мы (1.6.20) заменим следующим представлением:

$$I(h) = I(h) + \int\limits_a^b d(yh^2) =$$

$$= \int\limits_a^b [(Ph'^2 + Qh^2) + (y'h^2 + 2yhh')]\,dt = \qquad (1.6.21)$$

$$= \int\limits_a^b P\left[h'^2 + 2h'(\frac{yh}{P}) + \frac{Q+y'}{P}\cdot h^2\right]\,dt.$$

Если окажется, что

$$\left(\frac{yh}{P}\right)^2 = \frac{Q+y'}{P}h^2, \qquad (1.6.22)$$

то квадратная скобка под знаком интеграла (1.6.21) будет являться квадратом суммы, т. е.

$$I(h) = \int\limits_a^b P\left[h' + \frac{y}{P}h\right]^2\,dt, \qquad (1.6.23)$$

и неотрицательность $I(h)$ на N_0 будет очевидна.

В проведенных рассуждениях функция y была произвольной. Можно ли выбрать ее так, чтобы гарантировать выполнение (1.6.22)? Упрощая (1.6.22) естественным образом, получим

$$y' = \frac{y^2}{P} - Q. \qquad (1.6.24)$$

Таким образом, в качестве y мы можем взять любое решение дифференциального уравнения (1.6.24). Это уравнение имеет гладкую по y и непрерывную по t правую часть, и поэтому вопрос о его разрешимости тривиален. Следовательно, представление (1.6.23) для $I(h)$ реально.

В проведенном рассуждении есть ошибка, замеченная Лагранжем: для справедливости представления (1.6.23) необходимо, чтобы соответствующая функция $y(t)$ была определена на всем отрезке $[a,b]$, т. е. чтобы у уравнения (1.6.24) существовало решение, продолжимое на весь отрезок. Регулярность правой части (1.6.24) обеспечит лишь локальную разрешимость,

т. е. разрешимость любой задачи Коши лишь в окрестности начальной точки. Уже на простейшем примере функционала $I(h) = \int_a^b [h'^2 - h^2]\,dt$ соответствующее уравнение (1.6.24) имеет вид $y' = 1+y^2$, а его общее решение имеет вид $y(t) = tg(t+C)$, и если $b-a > \pi$, то ни одно из частных решений в целом на отрезке $[a,b]$ не определено.

Можно ли исправить рассуждения Лежандра? Для этого необходимо обеспечить нелокальную разрешимость уравнения (1.6.24). Это уравнение есть классическое уравнение Риккати, и потому может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. А для линейного уравнения каждое его решение наверняка определено на всем отрезке $[a,b]$. Соответствующая замена

$$y = -\frac{\varphi'}{\varphi}P \qquad (1.6.25)$$

приводит (1.6.24) к виду

$$(P\varphi')' - Q\varphi = 0. \qquad (1.6.26)$$

В предположении непрерывности P' это уравнение наверняка разрешимо на всем отрезке $[a,b]$. Однако нам для правомочности замены, обратной к (1.6.25), т. е. для получения функции $y(t)$, гладкой на всем $[a,b]$, необходимо не всякое решение уравнения (1.6.26), а лишь то, которое не имеет нулей на $[a,b]$.

Определение 1.6.2. *Функционал* (1.6.20) *с гладкой* $P(t)$ *удовлетворяет условию Якоби, если уравнение* (1.6.26) *имеет хотя бы одно решение без нулей на* $[a,b]$. *Уравнение* (1.6.26) *называют уравнением Якоби.*

Проведенные рассуждения позволяют считать доказанной следующую теорему.

Теорема 1.6.2. *Пусть функция* $P(t)$ *непрерывно дифференцируема и строго положительна на* $[a,b]$. *Если при этом выполняется условие Якоби, то* $I(h) \geqslant 0$ *при всех* $h \in N_0$.

1.6.4. Неосцилляция уравнения Якоби

Рассмотрим на $[a,b]$ уравнение (Якоби)

$$(P\varphi')' - Q\varphi = 0 \qquad (1.6.27)$$

с непрерывной $Q(t)$ и гладкой $P(t) > 0$.

Определение 1.6.3. *Уравнение* (1.6.27) *называется неосциллирующим, если каждое его нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение имеет не более одного нуля в* $[a, b]$.

Рассмотрим пример. Уравнение $\varphi'' + \varphi = 0$ с общим решением $\varphi = A\sin(t+B)$ не осциллирует на отрезке $[a, b]$, если и только если $b-a < \pi$.

Определение 1.6.4. *Точка* $\xi \in [a, b]$ *называется сопряженной к точке* $\eta < \xi$ $(\eta \in [a, b])$, *если существует нетривиальное решение уравнения* (1.6.27)*, обращающееся в нуль в обеих точках.*

Согласно этому определению сопряженные точки могут определяться так: из точки $t = \eta$ «выпускаются» различные решения (берутся решения задачи Коши $\varphi(\eta) = 0$, $\varphi'(\eta) = \lambda$ при различных λ) и смотрятся другие нули этих решений $\varphi_\lambda(t)$. Каждый такой нуль есть точка, сопряженная к этой. Важно отметить, что сопряженные точки не зависят от λ. В самом деле, в силу однородности уравнения (1.6.27) и вследствие однозначной разрешимости задачи Коши $\varphi_\lambda(t) \equiv \dfrac{\lambda}{\lambda_0}\varphi_{\lambda_0}(t) \quad (\lambda_0 \neq 0)$. Поэтому все сопряженные к η точки могут быть определены как нули только одного нетривиального решения φ_{λ_0}, «выпущенного» из точки η при фиксированном λ_0, например, при $\lambda_0 = 1$. Таким образом, сопряженная к η точка может быть определена как отличный от η нуль решения с начальными условиями $\varphi(\eta) = 0, \varphi'(\eta) = 1$.

Теорема 1.6.3. *Для уравнения (1.6.27) следующие три свойства эквивалентны:*

а) существует решение (1.6.27) без нулей в $[a, b]$ *(условие Якоби);*

б) уравнение (1.6.27) не осциллирует на $[a, b]$*;*

в) в $(a, b]$ *нет точек, сопряженных к* a.

Доказательство.

Покажем справедливость цепочки импликаций (а)⇒(б)⇒(в)⇒ (а).

1) Для доказательства (а)⇒(б) предположим противное, т. е. что в предположении (а) свойство (б) несправедливо. Тогда существует решение $u(t) \not\equiv 0$ уравнения (1.6.27), имеющее не менее двух различных нулей в $[a, b]$. В частности, существуют точки $\xi_1 < \xi_2$ из $[a, b]$ такие, что $u(t) \neq 0$ в (ξ_1, ξ_2) и $u(\xi_1) = u(\xi_2) = 0$ (докажите существование таких точек ξ_1, ξ_2). Между ξ_1 и ξ_2 функция $u(t)$ сохраняет строгий знак. Поэтому, в силу однородности уравнения (1.6.27), можно считать, что $u(t) > 0$ на (ξ_1, ξ_2).

Пусть $z(t)$ — решение (1.6.27), обеспечиваемое условием (а). Можно считать, что $z(t) > 0$ на $[a, b]$. Рассмотрим множество $\lambda \in R$ таких, что $\lambda u(t) \leqslant z(t)$ при всех $t \in (\xi_1, \xi_2)$. Это множество Λ, очевидно, непусто (оно содержит $\lambda = 0$) и ограничено сверху (покажите сами). Обозначим $\lambda_0 = \sup \Lambda$. Для функции $y(t) = z(t) - \lambda_0 u(t)$ справедливы следующие свойства: $y(t) \geqslant 0$ на $[\xi_1, \xi_2]$, $y(\xi_1) > 0$, $y(\xi_2) > 0$ и $\inf\limits_{[\xi_1, \xi_2]} y(t) = 0$.

Поэтому в (ξ_1, ξ_2) существует точка t_0 доставляющая минимум $y(t)$, причем $y(t_0) = 0$. Поэтому $y'(t_0) = 0$. Но тогда функция $y(t)$ удовлетворяет условиям Коши $y(t_0) = y'(t_0) = 0$. Этим же условиям удовлетворяет и решение $x(t) \equiv 0$. В силу единственности решения задачи Коши должно, следовательно, быть $y(t) \equiv 0$, т. е. $z(t) \equiv \lambda_0 u(t)$, что явно невозможно. Это противоречие доказывает, что (а)⇒(б).

2) Предположение о несправедливости (в) означает существование в $[a, b]$ точки $\xi > a$ и решения $h(t)$ уравнения (1.6.27) таких, что $h(a) = h(\xi) = 0$, причем $h(t) \not\equiv 0$. Но это противоречит (б). Значит, импликация (б)⇒(в) верна.

Перейдем к доказательству (в)⇒(а). Пусть $u_0(t)$ — решение уравнения (1.6.27) с начальными условиями

$$u(a) = 0, \quad u'(a) = 1. \tag{1.6.28}$$

Очевидно, $u(t) > 0$ при $a < t \leqslant b$. Если теперь взять решение $v(t)$ уравнения (1.6.27) с аналогичными условиями на правом конце

$$v(b) = 0, \quad v'(b) = -1,$$

то оно по причинам, изложенным выше, не может иметь нулей слева от b, т. е. на $[a, b)$. В самом деле, $v(\xi) = 0$ при $\xi \geqslant a$ (и $\xi < b$). Мы можем считать, что ξ – ближайший к b нуль $v(t)$, т. е. что $v(t) > 0$ на (ξ, b). Но тогда на замкнутом промежутке $[\xi, b]$ решение $u(t)$ не имеет нулей, откуда по аналогии с импликацией $(a) \Rightarrow (b)$ следует, что и $u(t)$ не может иметь, кроме $t = b$, еще один нуль на $[\xi, b]$.

Таким образом, обе построенные функции $u(t)$ и $v(t)$ строго положительны внутри $[a, b)$, причем $u(b) > 0$ и $v(a) > 0$. Но тогда их сумма не имеет нулей и в точках a, b, что означает требуемое свойство (9).

1.6.5. Усиленная теорема Якоби

Для квадратичного функционала

$$I(h) = \int_a^b [Ph'^2 + Qh^2]\, dt \tag{1.6.29}$$

с непрерывной $Q(t)$ и гладкой $P(t)$ справедлива

Теорема 1.6.4. *Пусть выполнены условия:*

а) $P(t) > 0$ *на* $[a,b]$*;*

б) соответствующее (1.6.29) *уравнение Якоби*

$$(P\varphi')' - Q\varphi = 0 \tag{1.6.30}$$

не осциллирует на $[a,b]$.

Тогда существует число $\alpha_0 > 0$ *такое, что*

$$I(h) \geqslant \alpha_0 \cdot \int_a^b h'^2\, dt \quad (h \in N_0). \tag{1.6.31}$$

Доказательство.

Рассмотрим функционал

$$I_\alpha(h) = \int_a^b [(P-\alpha)h'^2 + Qh^2]\, dt$$

и покажем, что при достаточно малых $\alpha > 0$ этот функционал удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы Якоби, из чего будет вытекать его неотрицательность на N_0 и, следовательно, свойство (1.6.31).

1) Положим для удобства $P(t) - \alpha = P_\alpha(t)$. По условию (а) и в силу непрерывности $P(t)$ существует $\varepsilon_0 > 0$, для которого $\varepsilon_0 < P(t)$ на $[a,b]$, поэтому $P_\alpha(t) > 0$ при $0 < \alpha < \varepsilon_0$, что означает выполнение первого условия теоремы Якоби для $I_\alpha(h)$.

2) Покажем теперь, что соответствующее $I_\alpha(h)$ уравнение Якоби

$$(P_\alpha\varphi')' - Q\varphi = 0 \tag{1.6.32}$$

не осциллирует на $[a,b]$ при малых $\alpha > 0$. Основным в наших рассуждениях будет то обстоятельство, что первый коэффициент P_α этого уравнения стремится к первому коэффициенту уравнения (1.6.30) при $\alpha \to 0$, что позволит использовать непрерывную зависимость решения от параметров уравнения.

Пусть φ_0 — решение уравнения (1.6.30), не имеющее нулей в $[a,b]$. Пусть для определенности $\varphi_0(t) > 0$. Обозначим через φ_α решение уравнения (1.6.32) с теми же начальными условиями, что и φ_0, т. е. $\varphi_\alpha(a) = \varphi_0(a)$; $\varphi'_\alpha(a) = \varphi'_0(a)$. Решение φ_α должно непрерывно зависеть от α и потому $||\varphi_\alpha - \varphi_0||_{C_1} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Следовательно, $\varphi_\alpha(t)$ равномерно сходится к $\varphi_0(t)$ при $\alpha \to 0$ и, значит, существует ε_1 такое, что $|\varphi_\alpha(t) - \varphi_0(t)| < \dfrac{1}{2}\min\varphi_0(t)$ при $0 < \alpha < \varepsilon_1$ и всех $t \in [a,b]$. Поэтому $\varphi_\alpha(t) > 0$ на $[a,b]$ при $0 < \alpha < \varepsilon_1$. Таким образом, при $0 < \alpha < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ квадратичный функционал $I_\alpha(h)$ имеет строго положительный коэффициент $P_\alpha(t)$ и удовлетворяет условию Якоби. Теорема доказана.

1.6.6. Условие Якоби для вариационной задачи

Рассмотрим основную вариационную задачу $\Phi \to \min\limits_G$, где

$$\Phi(x) = \int_a^b F(t,x,x')\, dt,$$

$$G = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = A, x(b) = B\}.$$

Если функция F трижды непрерывно дифференцируема, то Φ имеет первую и вторую вариации для каждой $x \in \in C^1[a,b]$. При этом $\delta^2\Phi(x)h$ является квадратичным функционалом, соответствующее которому уравнение Якоби имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(F_{x'x'}\frac{d}{dt}\varphi\right) - \left(F_{xx} - \frac{d}{dt}F_{xx'}\right)\varphi = 0. \tag{1.6.33}$$

Условие неосцилляции этого уравнения на $[a,b]$ мы назовем условием Якоби для вариационной задачи. Напомним, что коэффициенты уравнения (1.6.33) $F_{x'x'}(t, x(t), x'(t))$ и др. вычислены на той же функции $x(t)$, на которой вычисляются первая и вторая вариации $\delta\Phi(x)$, $\delta^2\Phi(x)$.

Что дает теорема Якоби, примененная к $\delta^2\Phi$? Условие $P(t) > 0$ превращается в усиленное условие Лежандра

$$F_{x'x'}(t, x(t), x'(t)) > 0. \tag{1.6.34}$$

Это условие в сочетании с условием Якоби обеспечивает строгую знакоопределенность второй вариации. Далее будет показано, что если при этом $x(t)$ является экстремалью, то она будет давать локальный минимум Φ в C^1.

Сейчас мы остановимся на вопросе, что дает для исходной вариационной задачи условие Якоби.

Пусть вначале Φ сам является квадратичным функционалом, т. е.

$$\Phi(x) = \int\limits_a^b [Px'^2 + Qx^2]\,dt \quad (x \in G), \tag{1.6.35}$$

и пусть для (1.6.35) выполняется условие Якоби. Так как в данном случае $\delta^2\Phi(x)h \equiv 2 \cdot \Phi(h)$, то это условие Якоби не зависит от того, на какой функции $x(t)$ оно проверяется.

Покажем, что функционал (1.6.35) при условии Якоби имеет не более одной точки экстремума.

Это обстоятельство следует из того факта, что для функционала (1.6.35) уравнение Эйлера тождественно уравнению Якоби (проверьте сами). Если $x_1(t)$, $x_2(t)$ — две различные точки экстремума Φ на G, то разность $x_1(t) - x_2(t)$ будет являться нетривиальным решением уравнения Якоби с нулевыми значениями на концах, что противоречит неосцилляции (1.6.33).

В случае общего интегрального функционала условие Якоби гарантирует изолированность в C^1 соответствующей экстремали.

Теорема 1.6.5. *Пусть $x_0(t)$ — экстремаль из G, т. е. решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям $x(a) = A$, $x(b) = B$. Пусть на x_0 выполняется* (1.6.34) *и условие Якоби. Тогда x_0 имеет в C^1 окрестность, не содержащую экстремалей из G.*

Доказательство.

В предположении противного в G существует сходящаяся (по метрике C^1) к x_0 последовательность экстремалей $x_n(t)$, отличных от $x_0(t)$. Так как

$$F_x(t, x_n(t), x_n'(t)) - F_x(t, x_0(t), x_0'(t)) - \\ - \frac{d}{dt}[F_{x'}(t, x_n(t), x_n'(t)) - F_{x'}(t, x_0(t), x_0'(t))] \equiv 0,$$

то, представляя приращения функций F_x, $F_{x'}$ с помощью формулы о конечных приращениях, имеем

$$F_{xx}(t, æ_n(t), æ_n'(t)) \cdot y_n + F_{xx'}(t, æ_n(t), æ_n'(t)) \cdot y_n' - \\ - \frac{d}{dt}\left[F_{x'x}(t, æ_n(t), æ_n'(t)) \cdot y_n + F_{x'x'}(t, æ_n(t), æ_n'(t)) \cdot y_n'\right] \equiv 0, \tag{1.6.36}$$

где обозначено $y_n = x_n - x_0$; $æ_n(t) = x_0(t) + \Theta(t)y_n(t)$, $æ_n'(t) = = x_0'(t) + + \theta(t) \cdot y_n'(t)$, $0 < \Theta(t) < 1$.

Очевидно, $æ_n \to x_0$ в $C^1[a, b]$. Заменяя в (1.6.36) $\dfrac{y_n(t)}{||y_n(t)||} \equiv \varphi_n(t)$ (норма в C^1), имеем после приведения подобных

$$([F_{xx}]_n - \frac{d}{dt}[F_{x'x}]_n)\varphi_n(t) - \frac{d}{dt}([F_{x'x'}]_n\varphi_n'(t)) \equiv 0, \tag{1.6.37}$$

где символ $[F]_n$ означает вычисление соответствующей функции на наборе аргументов $(t, æ_n(t), æ_n'(t))$. Так как $æ_n \to x_0$ по норме пространства C^1, то коэффициенты в (1.6.37), стоящие при φ_n и φ_n', стремятся к соответствующим коэффициентам уравнения Якоби (1.6.33). Если бы последовательность φ_n сходилась в C^1, то ее предел $\varphi_0(t)$ оказался бы решением уравнения (1.6.33). При этом, так как $x_n, x_0 \in G$, то $y_n \in N_0$, т. е. $y_n(a) = = 0$ и $y_n(b) = 0$. Но тогда и $\varphi_n(t)$ имеет нули на концах, откуда следует, что $\varphi_0(a) = 0 = \varphi_0(b)$. По построению $||\varphi_n|| = 1 \quad (\forall n)$, поэтому $\varphi_0(t) \not\equiv 0$. Полученное означает, что b является сопряженной к a точкой уравнения (1.6.33), что противоречит неосцилляции (1.6.33).

Итак, для доказательства этой теоремы достаточно показать, что $\{\varphi_n\}$ сходится или содержит сходящуюся подпоследовательность. Мы покажем компактность $\{\varphi_n\}$ в C^1.

Из ограниченности $\{\varphi_n\}$ в C^1 следует ограниченность $\{\varphi_n\}$ в C, т. е. равномерная ограниченность этой последовательности и равномерная ограниченность последовательности производных. Пусть $K = \sup\limits_{n,t}|\varphi_n'(t)|$, тогда $|\varphi_n(t_1) - \varphi_n(t_2)| \leqslant \leqslant K \cdot |t_1 - t_2|$ одновременно для всех n и $t_1, t_2 \in [a, b]$, т. е. последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ равностепенно непрерывна. Значит, она компактна в C. С точностью до перехода к сходящейся подпоследовательности и перенумерации мы можем считать, что φ_n сходятся в C.

Если теперь выразить φ_n'' из равенства (1.6.37), то в силу равномерной ограниченности получаемых при φ_n и φ_n' коэффициентов (эти коэффициенты сходятся относительно n) и в силу равномерной ограниченности последовательностей $\{\varphi_n(t)\}$ и $\{\varphi_n'(t)\}$ мы получим, что последовательность $\{\varphi_n''(t)\}$ равномерно ограничена. Отсюда аналогично предыдущему следует, что последовательность $\{\varphi_n'(t)\}$ удовлетворяет равномерному условию Липшица, т. е. равностепенно непрерывна. Значит, ее некоторая подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}'\}$ равномерно сходится в C. Поэтому последовательность $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в C^1, что и доказывает теорему.

1.6.7. Достаточные условия слабого экстремума

Говорят, что функция $x_0(t)$ дает слабый минимум функционалу $\Phi(x) = \int_a^b F(t,x,x')\,dt$ на $G = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = A, x(b) = B\}$, если приращение $\Delta\Phi = \Phi(x) - \Phi(x_0)$ неотрицательно в некоторой окрестности x_0 в смысле метрики C^1. Слабый минимум отличают от сильного: x_0 дает сильный минимум Φ на G, если $\Phi(x) \geqslant \Phi(x_0)$ при $x \in G$, близких к x_0 в смысле метрики C. Очевидно, точка сильного минимума дает одновременно слабый минимум. Поэтому все необходимые условия слабого минимума (уравнение Эйлера, условие Лежандра) являются необходимыми условиями сильного минимума. Естественно, что известные нам условия должны как-то фигурировать и при описании достаточных условий экстремума.

Теорема 1.6.6. *Пусть функция $F(t,x,x')$ достаточно гладкая, и пусть функция $x_0(t) \in C^1[a,b] \cap G$ удовлетворяет следующим условиям:*

а) $x_0(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, т. е. является экстремалью;

б) на $x_0(t)$ выполняется усиленное условие Лежандра

$$F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) > 0;$$

в) на x_0 выполняется условие Якоби.

Тогда x_0 дает слабый минимум Φ на G.

Доказательство.

Рассмотрим на G приращение $\Delta\Phi = = \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$, т. е.

$$\Delta\Phi = \int_a^b [F(t, x_0(t) + h(t), x_0'(t) + h'(t)) - F(t, x_0(t), x_0'(t))]\,dt. \tag{1.6.38}$$

Разлагая подынтегральное выражение $[\ldots]$ по формуле Тейлора, имеем

$$\begin{aligned}[\ldots] &= F_x \cdot h(t) + F_{x'}h'(t) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\widetilde{F}_{xx}h^2(t) + 2\widetilde{F}_{xx'}hh' + \widetilde{F}_{x'x'}h'^2\right),\end{aligned} \tag{1.6.39}$$

где при каждом t производные $F_x, F_{x'}$ взяты на наборе $(t, x_0(t), x_0'(t))$, а тильда над остальными производными означает, что эти производные $F_{xx}, F_{xx'}, F_{x'x'}$ вычислены на наборе $(t, x_0 + \Theta h, x_0' + \Theta h')$, где $\Theta = = \Theta(t) \in (0,1)$. Учитывая (1.6.39) в представлении (1.6.39), имеем

$$\Delta\Phi = \int_a^b [F_x h + F_{x'}h']\,dt + r(x_0, h), \tag{1.6.40}$$

где обозначено

$$r(x_0, h) = \frac{1}{2}\int_a^b [\widetilde{F}_{xx}h^2 + 2\widetilde{F}_{xx'}hh' + \widetilde{F}_{x'x'}h'^2]\,dt. \tag{1.6.41}$$

Очевидно, первое слагаемое в (1.6.40) есть не что иное, как первая вариация. Но в силу условия (а) (x_0 — экстремаль) должно быть $\delta\Phi(x_0)h \equiv 0$. Поэтому $\Delta\Phi$ совпадает с $r(x_0, h)$.

В силу гладкости F функционал Φ имеет вторую вариацию

$$\delta^2\Phi(x_0)h = \int_a^b [F_{xx}h^2 + 2F_{xx'}hh' + F_{x'x'}h'^2]\,dt. \tag{1.6.42}$$

Для дальнейших рассуждений полученное нами равенство $\Delta\Phi \equiv r(x_0, h)$ удобно представить в следующем виде:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}\delta^2\Phi(x_0, h) + w(x_0, h), \tag{1.6.43}$$

где обозначено

$$w(x_0, h) \equiv r(x_0, h) - \frac{1}{2}\delta^2\Phi(x_0)h. \tag{1.6.44}$$

Условия (б) и (в) теоремы означают, что для второй вариации $\delta^2\Phi(x_0)$ выполняются условия теоремы Якоби (усиленной). Поэтому при некотором $\alpha_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\delta^2\Phi(x_0)h \geqslant \alpha_0 \int_a^b h'^2\,dt,$$

откуда в силу (1.6.43) вытекает, что

$$\Delta\Phi \geqslant \alpha_0 \int_a^b h'^2\,dt + w(x_0,h).$$

Поэтому теорема будет доказана, если мы покажем, что справедлива следующая

Лемма 1.6.2 (об оценке «хвоста»). *При $h \in N_0$, достаточно малых по метрике $C^1[a,b]$, справедливо неравенство*

$$w(x_0,h) \geqslant -\alpha_0 \int_a^b h'^2\,dt. \tag{1.6.45}$$

Доказательство.

Представление (1.6.44) «хвоста» $w(x_0,h)$ с учетом (1.6.41) и (1.6.42) можно переписать в виде

$$w(x_0,h) = \frac{1}{2}\int_a^b [\eta_1 h^2 + 2\eta_2 hh' + \eta_3 h'^2]\,dt, \tag{1.6.46}$$

где обозначено

$$\eta_1 = \widetilde{F}_{xx} - F_{xx}; \quad \eta_2 = \widetilde{F}_{xx'} - F_{xx'}; \quad \eta_3 = \widetilde{F}_{x'x'} - F_{x'x'}. \tag{1.6.47}$$

По смыслу обозначений $\widetilde{F}_{xx}, \widetilde{F}_{xx'}, \widetilde{F}_{x'x'}$, вычисляемых усредненно (между $x_0(t)$ и $x_0(t)+h(t)$), коэффициенты $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$ зависят от h. При $h \underset{C^1[a,b]}{\Longrightarrow} 0$ эти коэффициенты η_1, η_2, η_3 также стремятся к нулю по метрике $C^1[a,b]$.

Среднее слагаемое в (1.6.46) допускает (так как, очевидно, $|2hh'| \leqslant h^2 + h'^2$) интегральную оценку

$$\left|\int 2\eta_2 hh'\,dt\right| \leqslant \int (|\eta_2|h^2 + |\eta_2|h'^2)\,dt,$$

что позволяет в целом оценить $\omega(x_0,h)$, так $w(x_0,h) \leqslant \int_a^b [\varepsilon_1 h^2 + \varepsilon_2 h'^2]\,dt$, где коэффициенты $\varepsilon_1 = |\eta_1| + |\eta_2|$ и $\varepsilon_2 = |\eta_2| + |\eta_3|$ стремятся к нулю в $C[a,b]$ при $\|h\|_{C_1} \to 0$.

Поэтому

$$2|w(x_0,h)| \leqslant \gamma_1 \int_a^b h^2\,dt + \gamma_2 \int_a^b h'^2\,dt, \tag{1.6.48}$$

где $\gamma_1 = ||\varepsilon_1||_C$, $\gamma_2 = ||\varepsilon_2||_C$, причем $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $h \underset{C^1[a,b]}{\Longrightarrow} 0$.

Покажем, что в правой части (1.6.48) первое слагаемое подчинено второму. Для этого представим $h(t)$ в виде $h(t) = h(a) + \int_a^t h'(s)\,ds = \int_a^t h'(s)\,ds$ (так как $h(a) = 0$). Отсюда $|h(t)| \leqslant \int_a^t |h'(s)|\,ds \leqslant \int_a^b |h'(s)|\,ds$. Последний интеграл можно оценить с помощью неравенства Коши–Буняковского

$$\int_a^b |h'|\,ds \leqslant \left[\int_a^b h'^2\,ds \cdot \int_a^b 1\cdot\,ds\right]^{1/2},$$

поэтому

$$|h(t)|^2 \leqslant \int_a^b h'^2\,ds \cdot (b-a).$$

Интегрируя это неравенство, имеем

$$\int_a^b |h(t)|^2\,dt \leqslant (b-a)^2 \cdot \int_a^b h'^2\,ds.$$

Отсюда и из (1.6.48) следует, что

$$2 \cdot |w(x_0, h)| \leqslant [(b-a)^2\gamma_1 + \gamma_2] \cdot \int_a^b h'^2\, dt,$$

причем коэффициент $[(b-a)^2\gamma_1 + \gamma_2]$ вместе с γ_1 и γ_2 стремится к нулю при $||h||_{C^1[a,b]} \to 0$, что и доказывает лемму.

1.7. Достаточные условия сильного экстремума

Мы продолжаем рассмотрение простейшей вариационной задачи

$$\Phi(x) = \int_a^b F(t, x, x')\, dt, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

в предположении достаточной гладкости F и регулярности задачи, т. е. при условии $F_{x'x'} \neq 0$ на рассматриваемой экстремали $x_0(t)$.

Напомним, что x_0 дает по определению сильный минимум в задаче с закрепленными концами, если приращение $\Delta\Phi = \Phi(x) - \Phi(x_0)$ неотрицательно при x, достаточно близких к x_0 в смысле метрики $C[a, b]$ (в отличие от слабого минимума, где близость понимается по метрике $C^1[a, b]$, т. е. с учетом производных).

1.7.1. Поле экстремалей

Для фиксированной функции $x_0(t)$ через $\Gamma_\varepsilon(x_0)$ обозначим множество точек плоскости (t, x), заключенных строго между графиками функций $x_1(t) = x_0(t) - \varepsilon$ и $x_2(t) = x_0(t) + \varepsilon$ на отрезке $[a, b]$. Точнее:

$$\Gamma_\varepsilon(x_0) = \{(t, x) : x_0(t) - \varepsilon < x < x_0(t) + \varepsilon,\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Множество $\Gamma_\varepsilon(x_0)$ должно содержать графики всех функций $x(t)$, находящихся (по метрике $C[a, b]$) в ε-окрестности x_0.

Определение 1.7.1. *Пусть $x_0(t)$ — экстремаль. Однопараметрическое семейство функций $x(t, C)$ (C — скаляр) называется полем экстремалей, включающим $x_0(\cdot)$, если*

а) функция $x(t, C)$ определена и непрерывна по C в некоторой окрестности точки C_0 (т. е. при $|C - C_0| < \varepsilon_0$);

б) при каждом фиксированном C функция $x(t, C)$ является по t экстремалью; при $C = C_0$ $\quad x(t, C_0) = x_0(t)$;

в) при каждом t функция $x(t, C)$ строго монотонна по C.

Какими свойствами обладает семейство экстремалей $x(t, C)$ в условиях этого определения? Во-первых, любые две экстремали $x(t, C_1)$ и $x(t, C_2)$ не пересекаются в силу строгой монотонности по C функции $x(t, C)$. Во-вторых, для любых двух экстремалей $x(t, C_1) = x_1(t)$, $x(t, C_2) = x_2(t)$ полоса $\Omega = \{(t, x) : x_1(t) < x < x_2(t), t \in [a, b]\}$ сплошь покрыта графиками экстремалей из того же семейства. В самом деле, при каждом фиксированном t непрерывная по C функция $x(t, C)$ сплошь заполняет своими значениями промежуток $[x(t, C_1), x(t, C_2)]$. В случаях когда конструируемое семейство $x(t, C)$ оказывается дифференцируемым по C, вместо строгой монотонности по C достаточно проверить отличие от нуля производной $\dfrac{\partial}{\partial C} x(t, C)|_{C=C_0}$ при всех $t \in [a, b]$.

Определение 1.7.2. *Скажем, что экстремаль $x_0(t)$ допускает включение в поле экстремалей, если существует поле экстремалей $x(t, C)$, включающее $x_0(t)$ и, кроме того, существует множество $\Gamma_\varepsilon(x_0)$, которое покрывается полем $x(t, C)$, т. е. через каждую точку $(t, x) \in \Gamma_\varepsilon(x_0)$ проходит одна из экстремалей поля.*

Теорема 1.7.1. *Пусть $x_0(t)$ экстремаль. Пусть $x_0(t)$ удовлетворяет условию Якоби.*

Тогда $x_0(t)$ допускает включение в поле экстремалей.

Доказательство.

Пусть $\varphi_0(t)$ — решение уравнения Якоби, не имеющее нулей в отрезке $[a, b]$. Для уравнения Эйлера рассмотрим следующие начальные условия:

$$x(a) = x_0(a) + \lambda\varphi_0(a), \quad x'(a) = x_0'(a) + \lambda\varphi_0'(a). \tag{1.7.1}$$

В силу регулярности уравнения Эйлера при достаточно малых λ задача (1.7.1) для уравнения Эйлера будет однозначно разрешима. Соответствующее решение $x(t, \lambda)$ дифференцируемо по λ в силу гладкости по λ условия (1.7.1). При этом, очевидно, $x(t, 0) \equiv x_0(t)$. Покажем, что $\dfrac{\partial}{\partial\lambda} x(t, \lambda)|_{\lambda=0} \neq 0$ на $[a, b]$.

При каждом λ функция $x(t, \lambda)$ превращает уравнение Эйлера в тождество

$$F_x(t, x(t, \lambda), x'(t, \lambda)) - \frac{d}{dt} F_{x'}(t, x(t, \lambda), x'(t, \lambda)) \equiv 0.$$

Дифференцируя его по λ в точке $\lambda = 0$ и полагая $\frac{\partial}{\partial\lambda}x(t,\lambda)\big|_{\lambda=0} = h_0(t)$, будем иметь

$$F_{xx}(t,x_0(t),x_0'(t))\cdot h_0(t) + F_{xx'}(t,x_0(t),x_0'(t))h_0'(t) - \\ - \frac{d}{dt}\big[F_{x'x}(t,x_0(t),x_0'(t))h_0(t) + F_{x'x'}(t,x_0(t),x_0'(t))h_0'(t)\big] \equiv 0. \tag{1.7.2}$$

Здесь мы воспользовались свойством $\frac{\partial}{\partial\lambda}x'(t,\lambda)\big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}x(t,\lambda)\Big)\Big|_{\lambda=0}$. Тождество (1.7.2) преобразуется к виду $(F_{xx} - \frac{d}{dt}F_{xx'})h_0(t) - - \frac{d}{dt}(F_{x'x'}h_0'(t)) \equiv 0$. Но это значит, что $h_0(t)$ удовлетворяет уравнению Якоби. По построению $h_0(t) = \frac{\partial}{\partial\lambda}x(t,\lambda)\big|_{\lambda=0}$, и из условия (1.7.1) следует, что $h_0(a) = \varphi_0(a)$ и $h_0'(a) = \varphi_0'(a)$. В силу однозначной разрешимости задачи Коши это означает, что $h_0(t) \equiv \varphi_0(t)$. Таким образом, функция двух переменных $x(t,\lambda)$ есть поле экстремалей при λ, близких к нулю, причем $x(t,0) = x_0(t)$. Для завершения доказательства теоремы нам необходимо показать, что существует некоторая полоса $\Gamma_\varepsilon(x_0)$, покрываемая полем $x(t,\lambda)$.

Пусть при $|\lambda| \leqslant \delta$ семейство $x(t,\lambda)$ образует поле экстремалей. Полоска

$$\Gamma[x(t,-\delta), x(t,+\delta)] = \{(t,y) : a \leqslant t \leqslant b, x(t,-\delta) \leqslant y \leqslant x(t,+\delta)\},$$

заключенная между графиками $x(t,-\delta), x(t,+\delta)$, покрыта полем $x(t,\lambda)$. Покажем, что в свою очередь эта полоска содержит в себе некоторую $\Gamma_\varepsilon(x_0)$. Для этого обозначим $\varepsilon_0 = \min\{|x(t,+\delta) - x_0(t)|, |x(t,-\delta) - - x_0(t)|\}$. Очевидно, $\varepsilon_0 > 0$. Поэтому полоска $\Gamma_\varepsilon(x_0)$ обладает по построению требуемыми свойствами. Теорема доказана.

1.7.2. Теорема Гильберта

Введем в рассмотрение функцию

$$H(t,x,x',p) = F(t,x,p) + (x'-p)F_{x'}(t,x,p), \tag{1.7.3}$$

являющуюся куском ряда Тейлора при разложении$F(t,x,x')$ по третьему аргументу в окрестности точки $x' = p$. Как и ранее, предполагается, что F — достаточно гладкая.

Пусть Ω — некоторая область в плоскости (t,x), покрытая полем экстремалей $x(t,C)$. Через каждую точку $(t_0,x_0) \in \Omega$ проходит одна (и только одна) экстремаль поля $x(t,C_0)$, т.е. $x(t_0,C_0) = x_0$. Если поле $x(t,C)$ фиксировано, то для каждой точки (t_0,x_0) однозначно определена величина $p(t_0,x_0) = x'(t_0,C_0)$ — производная экстремали поля, проходящей через эту точку. Определяемую таким образом функцию $p(t,x)$ называют наклоном (функцией наклона) данного поля.

Каковы свойства функции наклона $p(t,x)$? Во-первых, она непрерывна. В самом деле, если точка $(t_0,x_0) \in \Omega$, то достаточно близкая к ней точка (t_1,x_1) лежит в Ω, а проходящие через них экстремали достаточно близки, причем в метрике C^1, т.е. близки равномерно вместе с производными. Но тогда близки и их производные в точках $t = t_0$ и $t = t_1$. (Подробнее докажите сами.)

Далее. В окрестности каждой точки $(t_0,x_0) \in \Omega$ любая экстремаль поля $x(t,C)$ однозначно определяется своим начальным условием $x(t_0,C)$ в точке t_0, поэтому свойства $p(t,x)$ определяются свойствами зависимости $x(t,C)$, как решений уравнения Эйлера, от начальных условий. Поэтому $p(t,x)$ непрерывно дифференцируема по x. Дифференцируемость по t следует из определения.

Лемма 1.7.1. *Для каждой точки $(t_0,x_0) \in \Omega$ и проходящей через нее экстремали $x(t,C_0)$ поля справедливо равенство*

$$x''(t,C_0)|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial t}p(t_0,x_0) + \left[\frac{\partial}{\partial x}p(t_0,x_0)\right]\cdot p(t_0,x_0). \tag{1.7.4}$$

Доказательство.

По определению функции наклона $p(t,x)$ имеем тождество

$$x'(t,C) \equiv p(t,x(t,C)). \tag{1.7.5}$$

Дифференцируя его по t, получаем $x''(t,C) = p_t(t,x(t,C)) + p_x(t,x(t,C))\cdot \cdot x'(t,C)$, где p_t и p_x обозначают соответствующие частные производные $p(t,x)$. Заменяя здесь $x'(t,C)$ с помощью (1.7.5) и учитывая, что каждую точку (t,x) из Ω можно при некотором C представить в виде пары $(t,x(t,C))$, получаем требуемое.

Теорема 1.7.2 (Гильберта). *Пусть область Ω покрыта полем экстремалей и $p(t,x)$ — соответствующая функция наклона. Тогда определяемый на гладких кривых из Ω интеграл*

$$H(x) = \int_\gamma H(t,x,x',p(t,x))\,dt \tag{1.7.6}$$

зависит только от концов кривых, не завися от пути интегрирования.

Доказательство.

Подставляя (1.7.3) в (1.7.6) и учитывая $x'\,dt = dx$ на γ, получаем вместо (1.7.6)

$$H(x) = \int\limits_{\gamma} \{[F(t,x,p(t,x)) - p(t,x)F_{x'}(t,x,p(t,x))]\,dt + \\ + [F_{x'}(t,x,p(t,x))]dx\}.$$

Покажем, что выражение под интегралом является полным дифференциалом. Для этого необходимо проверить справедливость на Ω тождества

$$\frac{\partial}{\partial x}[F - pF_{x'}] - \frac{\partial}{\partial t}F_{x'} \equiv 0, \tag{1.7.7}$$

где набор $t, x, p(t,x)$ опущен. Так как, например,

$$\frac{\partial}{\partial x}F(t,x,p(t,x)) \equiv F_x(t,x,p(t,x)) + F_{x'}(t,x,p(t,x)) \cdot \frac{\partial p(t,x)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}F_{x'}(t,x,p(t,x)) \equiv F_{x't}(t,x,p(t,x,)) + +F_{x'x'}(t,x,p(t,x,)) \cdot \frac{\partial p(t,x)}{\partial t},$$

то левую часть (1.7.7) можно преобразовать к виду

$$F_x + F_{x'}p_x - p_xF_{x'} - pF_{x'x} - F_{x't} - F_{x'x'}p_t - pF_{x'x}p_x.$$

Или, что то же (два слагаемых взаимно уничтожились),

$$F_x - pF_{x'x} - [F_{x't} + F_{x'x'}(pp_x + p_t)]. \tag{1.7.8}$$

Так как каждая точка $(t,x) \in \Omega$ при некотором C имеет вид $(t, x(t,C))$, то (1.7.8) можно в силу (1.7.5) и (1.7.2) переписать так:

$$\begin{gathered} F_x(t,x(t,C),x'(t,C)) - \big[x'(t,C)F_{x'x}(t,x(t,C),x'(t,C)) + \\ + F_{x't}(t,x(t,C),x'(t,C)) + F_{x'x'}(t,x(t,C),x'(t,C)) \cdot x''(t,C)\big]. \end{gathered} \tag{1.7.9}$$

С другой стороны, так как $x(t,C)$ — экстремали, т. е. решения уравнения Эйлера, то при всех t и C

$$F(t,x(t,C),x'(t,C)) - \frac{d}{dt}F_{x'}(t,x(t,x(t,C),x'(t,C)) = 0.$$

Раскрывая здесь полную производную $\dfrac{d}{dt}F_{x'}$, мы получим в левой части этого тождества в точности выражение (1.7.9), что и доказывает (1.7.7).

1.7.3. Теоремы Вейерштрасса

Для основной задачи вариационного исчисления

$$\Phi = \int\limits_a^b F(t,x,x')\,dt \to \min_{\left\{\substack{x(a)=A \\ x(b)=B}\right\}} \tag{1.7.10}$$

с достаточно гладкой F введем в рассмотрение функцию

$$E(t,x,x',p) \overset{\text{det}}{\equiv} F(t,x,x') - F(t,x,p) - (x'-p)F_{x'}(t,x,p). \tag{1.7.11}$$

Напомним, что x_0 дает сильный минимум функционалу Φ на множестве $G = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = A, x(b) = B\}$, если $\Phi(x) \geqslant \Phi(x_0)$ при $x(t)$, близких к $x_0(t)$ в смысле метрики $C[a,b]$ (без учета производных).

Теорема 1.7.3. *Пусть $x_0(t)$ — экстремаль функционала Φ. Пусть $x_0(t)$ допускает включение в поле экстремалей (например, на ней выполняется условие Якоби). Пусть, наконец, справедливо неравенство*

$$E(t,x,x',p) \geqslant 0 \tag{1.7.12}$$

при всех (t,x), близких к $(t, x_0(t))$, и (t,p), близких к $(t, x_0'(t))$, и любых $x' \in \in (-\infty, \infty)$.

Тогда на $x_0(t)$ реализуется сильный минимум задачи (1.7.10).

В этой формулировке упрощенное высказывание о близости точек (t,x) и (t,p) к графикам функций $x_0(t)$ и $x_0'(t)$ строго толкуется так: существует $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что (1.7.12) справедливо при (t,x) и (t,p) из соответствующих полосок $\Gamma_{\delta_0}(x_0)$, $\Gamma_{\delta_1}(x_1)$.

Доказательство.

Пусть γ_0 — график $x_0(\cdot)$ и $x(t,C)$ — включающее $x_0(\cdot)$ поле экстремалей, а $p(t,x)$ — его наклон. На множестве всех гладких кривых γ, соединяющих точки (a,A) и (b,B), интеграл $H(\gamma)$ по теореме Гильберта есть константа. Но по определению этого интеграла (см. (1.7.1), (1.7.6)) должно быть $H(\gamma_0) = \Phi(\gamma_0)$. Поэтому $\Phi(\gamma_0) = H(\gamma)$ для любой гладкой кривой. Но тогда приращение $\Delta\Phi = \Phi(\gamma) - \Phi(\gamma_0) = \Phi(x) - \Phi(x_0)$ можно переписать в виде

$$\Delta\Phi = \int\limits_{\gamma} [F(t,x,x') - H(t,x,x',p(t,x))]\,dt \overset{(1.7.11)}{=} \\ \overset{(1.7.11)}{=} \int\limits_{\gamma} E(t,x,x',p(t,x))\,dt.$$

По условию подынтегральное выражение здесь наверняка неотрицательно, если кривая γ достаточно близка к γ_0 и если при этом $(t, p(t,x))$ окажется достаточно близким к графику $x_0'(t)$. Но последнее в силу очевидного тождества $p(t, x_0(t)) \equiv x_0'(t)$ следует из непрерывности $p(t,x)$. Теорема доказана.

Теорема 1.7.4. *Если в условиях теоремы 1.7.3 неравенство* (1.7.12) *справедливо хотя бы при* (t, x')*, близких к графику* $x_0'(t)$*, то* $x_0(t)$ *реализует слабый минимум.*

Доказательство незначительно дополняет предыдущие рассуждения. Предлагается провести его самостоятельно.

Если в условиях обеих теорем функция $F(t,x,x')$ дважды непрерывно дифференцируема по последнему аргументу, то, как легко проверить,

$$E(t,x,x',p) = \frac{(x'-p)^2}{2} F_{x'x'}(t,x,q), \tag{1.7.13}$$

где q — промежуточное между x' и p число, т. е. $q = x' + \Theta(p - x')(0 < \Theta < 1)$. Поэтому справедливо

Следствие 1.7.1 (упрощенная теорема Вейерштрасса).

Пусть $x_0(t)$ *— экстремаль, допускающая включение в поле экстремалей. Пусть справедливо неравенство*

$$F_{x'x'}(t,x,q) \geqslant 0 \tag{1.7.14}$$

для любых значений q *и при* (t,x)*, близких к графику* $x_0(t)$*. Тогда* $x_0(t)$ *дает сильный экстремум.*

Следствие 1.7.2. *Если* $x_0(t)$ *— экстремаль, допускающая включение в поле экстремалей, и если* (1.7.14) *справедливо для всех* (t,x)*,* (t,q)*, близких соответственно к графикам* $x_0(t)$ *и* $x_0'(t)$*, то* $x_0(t)$ *дает слабый минимум.*

Действительно, справедливость (1.7.14) при (t,q) из некоторой полоски $\Gamma_\varepsilon(t,x')$ влечет в силу (1.7.13) справедливость (1.7.12) при (t,x') и (t,p) из той же полоски.

Замечание 1.7.1. Следствие 1.7.2 содержит в себе теорему Якоби (проверьте!).

1.8. Прямые методы

Пусть G — многообразие в линейном нормированном пространстве E, и Φ — определенный на E функционал. Если $\inf\limits_G \Phi > -\infty$, то наверняка существует последовательность $x_n \in G$, на которой

$$\Phi(x_n) \to \mu = \inf_G \Phi. \tag{1.8.1}$$

Такую последовательность называют минимизирующей.

Пусть минимизирующая последовательность (или некоторая ее подпоследовательность) имеет предельную точку x_0. Является ли она точкой минимума? Ответ очевиден, если Φ непрерывна в точке x_0. Лебегом замечено, что для перехода в (1.8.1) к пределу предположение о непрерывности можно существенно ослабить.

Определение 1.8.1. *Функционал* Φ *называется полунепрерывным в точке* x_0*, если* $\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta = \delta(\varepsilon) > 0)\forall(h\colon ||h|| < \delta)[\Phi(x_0+h) > \Phi(x_0) - \varepsilon]$.

Теорема 1.8.1 (Лебега). *Пусть* $x_n \to x_0 \in G$*, справедливо* (1.8.1) *и* Φ *полунепрерывен в точке* x_0*. Тогда* $x_0 \to \min\limits_G \Phi$.

Доказательство.

В силу непрерывности Φ для каждого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n должно быть $\Phi(x_n) > \Phi(x_0) - \varepsilon$. Переходя здесь к пределу, имеем в силу (1), что $\inf \Phi \geqslant \Phi(x_0) - \varepsilon$. В то же время $\Phi(x_0) \geqslant \inf\limits_G \Phi$. Поэтому $\Phi(x_0) = \inf\limits_G \Phi$. Теорема доказана.

Если существование минимизирующей последовательности для ограниченного снизу функционала очевидно, то доказательство сходимости ее иногда установить невозможно. Так, в примере Вейерштрасса

$$\Phi = \int_0^1 t^2 x'^2\, dt \quad (x(0) = 0,\ x(1) = 1) \tag{1.8.2}$$

необходимой экстремали в $C^1[0,1]$ нет, хотя $\Phi(x) \geqslant 0$ $(\forall x')$. Можно ли в таком случае отыскивать значение $\inf\limits_G \Phi$? В приложениях на подобный вопрос часто удобно отвечать методом Ритца.

Теорема 1.8.2. *Пусть последовательность E_n подпространств из E монотонна, т. е. $E_n \subset E_{n+1}$, и плотна в E, т. е. $\overline{\bigcup\limits_n E_n} = E$. Пусть Φ непрерывен на E и*

$$\Phi(x_n) = \min_{E_n} \Phi. \tag{1.8.3}$$

Тогда x_n минимизирует Φ на E.

Доказательство.

В предположении противного при некотором $\varepsilon > 0$ и при всех n

$$\Phi(x_n) \geqslant \mu + \varepsilon. \tag{1.8.4}$$

С другой стороны, для некоторого $y \in E$ должно быть по определению $\Phi(y) < \mu + \varepsilon/3$. Так как y принадлежит замыканию $\bigcup\limits_n E_n$, то y можно как угодно близко аппроксимировать точками из $\bigcup\limits_n E_n$, т. е. существует последовательность $z_n \in \bigcup\limits_n E_n$, сходящаяся к y. В силу непрерывности Φ при достаточно больших n будет

$$\Phi(z_n) < \Phi(y) + \varepsilon/3 < \mu + 2\varepsilon/3. \tag{1.8.5}$$

Фиксируем один из таких элементов z_n. Так как он принадлежит $\bigcup\limits_k E_k$, то $z_n \in E_{k_0}$ при некотором k_0. В силу (1.8.3) $\Phi(x_{k_0}) \leqslant \Phi(z_n)$, откуда вследствие (1.8.5) $\Phi(x_0) \leqslant \mu + 2\varepsilon/3$, что противоречит (1.8.4). Теорема доказана.

В методе Ритца в качестве E_n берется линейная оболочка первых n элементов последовательности $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$. Поиск минимизирующей последовательности по правилу (1.8.3) сводится к минимизации функции конечного числа переменных. Если, например, $l_k(t) = t^{k-1} (k = 1, 2, \ldots)$, то E_n — пространство многочленов степени $(n-1)$.

Глава 2

Конечномерная оптимизация

2.1. Конечномерная оптимизация

Для заданного на $E = R^n$ непрерывного функционала Φ обсуждается задача $\Phi \to \min\limits_G$, где G — замкнутое ограниченное множество из R^n. Так как $\Phi : G \to R^1$ есть, по сути, непрерывная функция конечного числа переменных, то в силу компактности G существование точки минимума Φ на G следует из классической теоремы Вейерштрасса. Если бы эта точка $x_0 \to \min\limits_G \Phi$ оказалась внутренней в G, т. е. $x_0 \in \operatorname{Int} G$, то в случае дифференцируемости Φ в точке x_0 в силу теоремы Ферма было бы $\Phi'(x_0) = 0$ (здесь $\Phi'(x_0) = \nabla\Phi(x_0) = \operatorname{grad}\Phi(x_0)$). К сожалению, в самых важных случаях (об этом ниже) точка минимума не является внутренней в G.

2.1.1. Оптимизация линейного функционала

Всюду далее точку $x_0 \in G$ мы будем называть квазивнутренней (относительно внутренней) для G, если существует нетривиальное ($\neq \{0\}$) подпространство $L_0 \subset E$ такое, что $\forall(h \in L_0)\,\exists(\varepsilon_0 > 0)\,\forall(\lambda \in [0, \varepsilon_0])$: $[x_0 \pm \lambda h \in G]$. Если $L = x_0 + L_0$ — параллельное L_0 линейное многообразие и $G_0 = G \bigcap L$, а на L рассмотреть порождаемую обычными окрестностями из R^n топологию, то x_0 — внутренняя в G_0 точка в обычном смысле. Множество внутренних относительно L точек G будем обозначать через $\operatorname*{Int}\limits_L G$. Если это не приведет к недоразумениям, приговорку квази (относительно) у внутренних точек мы будем снимать, обозначая их множество через $\operatorname{Int} G$.

Пусть Φ — линейный функционал на E.

Теорема 2.1.1. *Пусть $x_0 \to \min\limits_G \Phi$. Тогда $\Phi(x) = \mathrm{const}$ на линейном многообразии L, относительно которого x_0 есть внутренняя в G точка.*

Доказательство.

Пусть L_0 — параллельное L подпространство и $G_0 = L \bigcap G$. Тогда $x_0 \to \min\limits_{G_0} \Phi$. При этом $x_0 \pm \lambda h \in G_0$ для любого $h \in L_0$ и достаточно малых $\lambda > 0$. Поэтому $\Phi(x_0) \leqslant \Phi(x_0 \pm \lambda h) = \Phi(x_0) \pm \lambda \Phi(h)$. Значит, $\pm\lambda\Phi(h) \geqslant 0$, т. е. $\Phi(h) = 0$ на L_0. Но тогда $\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0)$, т. е. $\Phi(x_0) = \Phi(x)$ $(\forall x \in L)$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что точка экстремума линейного функционала всегда принадлежит границе (относительной) множества G.

Упражнения

1) Каждый линейный (т. е. однородный и аддитивный) функционал Φ на R^n можно представить в виде $\Phi(x) = \langle x, g\rangle$, где g — некоторый элемент из R^n, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — символ скалярного произведения.

2) Каждый линейный на R^n функционал непрерывен.

3) Все нормы в R^n эквивалентны.

4) Определение квазивнутренней (относительно всего E) и внутренней точки эквивалентны.

5) Доказать, что любая норма в R^n есть непрерывный функционал.

2.1.2. Опорные гиперплоскости

Пусть l — линейный на R^n функционал. Напомним, что для каждого $C \in R$ множество $\{x : l(x) = C\} = L(l, C)$ называют гиперплоскостью l. Гиперплоскость $L(l, C)$ является линейным многообразием, параллельное ему подпространство — нулевая гиперплоскость — делит пространство $E = R^n$ на две части $E^+(l, C) = \{x : l(x) \geqslant C\}$ и $E^-(l, C) = \{x : l(x) \leqslant C\}$. Очевидно, $E^+(l, C) \cap E^-(l, C) = L(l, C)$.

Определение 2.1.1. *Гиперплоскость $L(l, C)$ называется опорной для множества G, если $G \cap L(l, C) \neq \varnothing$ и G лежит по одну сторону от $L(l, C)$, т. е. либо $G \subset E^+(l, C)$, либо $G \subset E^-(l, C)$. Точку $x_0 \in G \bigcap L(l, C)$ будем называть опорной относительно l на G.*

Свойство точки x_0 давать минимум или максимум Φ на G мы объединим одним обозначением $x_0 \to \operatorname{extr}\limits_G \Phi$.

Теорема 2.1.2. *Если функционал Φ линейный, то следующие свойства эквивалентны:*

а) $x_0 \to \operatorname{extr}\limits_G \Phi$;

б) x_0 *— опорная для Φ на G точка, т. е. гиперплоскость $L(\Phi, C)$ при $C = \Phi(x_0)$ является опорной для G в точке x_0.*

Доказательство легко следует из очевидного равенства

$$\min_G \Phi = \inf \Phi(G) = \\ = \sup\{C : \Phi(x) \geqslant C \quad \forall x \in G\},$$

здесь $\Phi(G)$ — множество значений Φ на G.

Определение 2.1.2. *Множество Γ назовем гранью G, если Γ совпадает с пересечением замыкания $\overline{G}$ множества G и некоторой опорной к $\overline{G}$ гиперплоскостью.*

По определению грань всегда замкнута. Если G замкнуто, то G содержит любую свою грань.

Согласно предыдущей теореме, грани существуют у любого замкнутого ограниченного множества. Из теоремы предыдущего пункта следует, что грань G не может содержать чисто внутренних точек G, а только квазивнутренние относительно многообразий размерности меньше n.

Всякая ли граничная точка G принадлежит некоторой грани G? Ответ, положительный для выпуклых множеств, дается классической теоремой отделимости.

Упражнения

1) Доказать, что множества $L(l, C)$, $E^+(l, C)$, $E^-(l, C)$ замкнуты.

2) Описать грани куба, тетраэдра, шара, полушария.

2.2. Элементы выпуклого анализа

2.2.1. Выпуклые множества

Множество G называют выпуклым, если оно вместе с каждой парой своих точек x, y содержит весь отрезок $[x,y]$, их соединяющий.

Здесь

$$[x,y]=\{x+\lambda(y-x):\lambda\in[0,1]\}=\{\alpha x+\beta y:\alpha,\beta\geqslant 0,\alpha+\beta=1\}.$$

Докажите, что: (а) внутренность выпуклого множества выпукла; (б) замыкание выпуклого множества выпукло.

Определение 2.2.1. *Элемент z называют выпуклой комбинацией элементов $x_1,x_2,\ldots,x_m$, если при некоторых $\alpha_i\geqslant 0$ $\left(\sum\limits_1^m\alpha_i=1\right)$ он допускает представление $z=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_mx_m$.*

Определение 2.2.2. *Множество $\operatorname{co}G$ всех выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов элементов из G называется выпуклой оболочкой G (овыпукливанием G).*

Очевидно, отрезок — выпуклая оболочка пары точек (концов), а треугольник — выпуклая оболочка тройки векторов (его вершин). Выпуклую оболочку конечного набора точек из R^n называют многогранником.

Теорема 2.2.1. $\operatorname{co}G$ *всегда выпукло.*

Доказательство.

По определению $\operatorname{co}G$ для любой пары $x,y\in\operatorname{co}G$ существуют $\{u_i\}_1^k$, $\{v_i\}_1^m\subset G$ такие, что $x=\sum\limits_1^k\alpha_iu_i$, $y=\sum\limits_1^m\beta_jv_j$, причем $\alpha_i,\beta_i\geqslant 0$ и $\sum\limits_1^k\alpha_i==1$, $\sum\limits_1^m\beta_j=1$. Без ограничения общности можно считать, что оба набора $\{u_i\}$ и $\{v_j\}$ совпадают (мы можем перейти к их объединению, расширив $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_j\}$ добавлением нулей). Пусть $x=\sum\limits_1^\nu\alpha_iz_i$, $y=\sum\limits_1^\nu\beta_iz_i$ при таких же α_i,β_i. Если $a\in[0,1]$, то

$$x+a(y-x)=\sum_1^\nu[\alpha_i+a(\beta_i-\alpha_i)]z_i=\sum_1^\nu\gamma_ix_i. \tag{2.2.1}$$

Здесь соответствующие коэффициенты $\gamma_i=\alpha_i+a(\beta_i-\alpha_i)$ неотрицательны и $\sum\gamma_i=(1-a)\sum\alpha_i+a\sum\beta_i=1-a+a=1$. Но тогда (2.2.1) означает, что $x+a(y-x)\in\operatorname{co}G$. Теорема доказана.

Теорема 2.2.2. *Для выпуклости G необходимо и достаточно, чтобы $G=\operatorname{co}G$.*

Доказательство.

Если $G=\operatorname{co}G$, то выпуклость G очевидна.

Наоборот, пусть G выпукло. Так как $G\subset\operatorname{co}G$, то нам необходимо показать, что $\operatorname{co}G\subset G$. Докажем индукцией по m, что для любых точек $x_1,\ldots,x_m$ из $\operatorname{co}G$ и любых $\alpha_i\geqslant 0$ $(\sum\limits_1^m\alpha_i=1)$ соответствующая выпуклая комбинация $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_mx_m$ принадлежит $\operatorname{co}G$. При $m=1;2$ это очевидно. Предполагая справедливость этого свойства при $m\leqslant N$, возьмем выпуклую комбинацию $z=a_1z_1+a_2z_2+\ldots+a_{N+1}z_{N+1}$. Можно сразу считать, что $a_1+\ldots+a_{N+1}\neq 0$, т.к. иначе $z=z_{N+1}\in G$. Полагая $A==a_1+\ldots+a_N$, будем иметь

$$z=A\left(\sum_1^N\frac{\alpha_i}{A}z_i\right)+\alpha_{N+1}z_{N+1}=Aw+\alpha_{N+1}z_{N+1}. \tag{2.2.2}$$

Но элемент $w=\sum\limits_1^N(\frac{\alpha_i}{A})z_i\in\operatorname{co}\{z_i\}_1^N$ и, по предположению, $w\in G$. При этом, очевидно, $A+\alpha_{N+1}=1$. Поэтому (2.2.2), в силу выпуклости G, означает $x\in G$. Теорема доказана.

Теорема 2.2.3. $\operatorname{co}(\operatorname{co}G)=\operatorname{co}G$.

Доказательство.

Для выпуклого (теорема 2.2.1) множества $F=\operatorname{co}G$ теорема 2.2.2 означает $\operatorname{co}F=F$.

Упражнения

1) Если $G\subset F$, то $\operatorname{co}G\subset\operatorname{co}F$.

2) $\operatorname{co}(G\cup F)=\operatorname{co}\{\operatorname{co}G\cup\operatorname{co}F\}$.

2.2.2. Грубая теорема отделимости

Теорема 2.2.4. *Пусть G — выпуклое множество и $z_0\notin\overline{G}$. Тогда существует функционал $L(x)=\langle g_0,x\rangle$ такой, что*

$$l(z_0)>l(x)\quad(x\in G). \tag{2.2.3}$$

Доказательству предпошлем некоторые геометрические свойства. Рассмотрим функционал $\Phi(x) = ||z_0 - x||$ на G (норма евклидова $||h|| = \sqrt{\langle h, h\rangle}$). Он ограничен снизу на G. Величину

$$d(z_0, G) = \inf_G ||z_0 - x|| \tag{2.2.4}$$

называют расстоянием от z_0 до G.

Лемма 2.2.1. *Расстояние $d(z_0, G)$ достигается на $\overline{G}$.*

Доказательство.

Пусть x_n минимизирует $\Phi(x) = ||z_0 - x||$ на G, тогда последовательность $h_n = x_n - z_0$ ограничена и, следовательно, компактна. Вдоль сходящейся ее подпоследовательности $h_{n_k} \to h_0$ в силу непрерывности $\Phi(x)$ имеем $\Phi(x_{n_k}) = ||h_{n_k}|| \to ||h_0||$, причем $x_{n_k} = z_0 + h_{n_k}$, $x_{n_k} \in G$. Значит, $z_0 + h_0 \in \overline{G}$ и $(z_0 + h_0) \to \inf\limits_G \Phi$.

Определение 2.2.3. *Если $x_0 \in \overline{G}$ минимизирует (2.2.4), то элемент $z_0 - x_0 = h_0$ назовем внешней нормалью (к G из точки z_0).*

Лемма 2.2.2. *Пусть G выпукло и $z_0 \notin \overline{G}$. Пусть h_0 — соответствующая нормаль, т. е. $x_0 = z_0 - h_0 \to \min\limits_G ||z_0 - x||$. Тогда*

$$\langle h_0, x - x_0\rangle \leqslant 0 \quad (x \in \overline{G}). \tag{2.2.5}$$

Доказательство.

Для любой $x \in G$ в силу выпуклости G при каждом $t \in [0,1]$ должно быть $x_0 + t(x - x_0) \in G$. Поэтому $d_0 = d(z_0, G) \leqslant ||z_0 - x_0 - t(x - x_0)||$. Переходя отсюда к скалярным квадратам и учитывая $h_0 = z_0 - x_0$, получаем $d_0^2 \leqslant ||z_0 - x_0||^2 - 2t\langle h_0, x - x_0\rangle + t^2||x - x_0||^2$, т. е. $0 \leqslant -2t\langle h_0, x - x_0\rangle + t^2||x - x_0||^2$ при любом $t \in [0,1]$. Сокращая здесь на t, имеем $2\langle h_0, x - x_0\rangle \leqslant t||x - x_0||^2$ при $t \in [0,1]$. Отсюда и следует (2.2.5) при $x \in G$. Распространение (2.2.5) на $\overline{G}$ следует из непрерывности линейного функционала $l(x) = \langle h_0, x\rangle$.

Следствие 2.2.1. *Если G выпукло и $z_0 \notin \overline{G}$ фиксировано, то соответствующая внешняя нормаль единственна.*

Доказательство.

Пусть u_0, v_0 — две различные точки минимума $\Phi(x) = ||x - z_0||$ на $\overline{G}$. В силу леммы 2.2.2

$$\langle z_0 - u_0, v_0 - u_0\rangle \leqslant 0, \quad \langle z_0 - v_0, u_0 - v_0\rangle \leqslant 0. \tag{2.2.6}$$

Но $||u_0 - v_0||^2 = \langle u_0 - v_0, u_0 - v_0\rangle = \langle (z_0 - v_0) - (z_0 - u_0), u_0 - v_0\rangle = \langle z_0 - v_0, u_0 - v_0\rangle + \langle z_0 - u_0, v_0 - u_0\rangle$, причем последние два слагаемых в силу (2.2.6) неположительны. Значит, $||u_0 - v_0||^2 \leqslant 0$, т. е. $u_0 = v_0$, что и требовалось доказать.

Для доказательства теоремы 2.2.4 возьмем функционал $l(x) = \langle h_0, x\rangle$, где h_0 — внешняя для G нормаль к точке z_0. В силу леммы 2.2.2 $l(x) \leqslant l(x_0)$ для каждого $x \in G$. С другой стороны, $l(x_0) = \langle h_0, x_0\rangle = \langle h_0, z_0 - h_0\rangle = l(z_0) - ||h_0||^2 < l(z_0)$. Поэтому $l(x) < l(z_0)$. Теорема доказана.

2.2.3. Конусы

Важнейший пример выпуклых множеств — конусы.

Определение 2.2.4. *Неотрицательной комбинацией набора $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ из G называется любой элемент вида $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$ при неотрицательных α_i.*

Определение 2.2.5. *Конической оболочкой множества G называется множество $K(G)$ всех конечных неотрицательных комбинаций элементов из G.*

Очевидно, $K(G) \supset G$, причем вместе с каждым $x \in G$ в $K(G)$ входит и луч $\{tx : 0 \leqslant t < +\infty\}$. Если $\operatorname{Int} G \ni 0$, то $K(G) = R^n$ (докажите!).

Определение 2.2.6. *Множество G называется конусом, если $K(G) = G$.*

Конус K будем называть собственным, если он не совпадает со всем пространством.

Теорема 2.2.5. *Для любого собственного конуса существует неотрицательный на нем нетривиальный ($\not\equiv 0$) функционал.*

Доказательство.

Пусть z_0 — не принадлежащий замыканию конуса G элемент. В силу грубой теоремы отделимости существует такой функционал l, что $l(z_0) < l(x)$ для любых $x \in G$. Но тогда $l(z_0) < l(tx)$ для любого $t \geqslant 0$, т. е. $l(z_0) < 0$ (т. е. l нетривиален) и $l(x) > \frac{1}{t}l(z_0)$ для каждого $t > 0$. Поэтому $l(x) \geqslant 0$ для любого $x \in G$.

Упражнения

1) G является конусом тогда и только тогда, когда $\alpha x + \beta y \in G$ при любых $x, y \in G$ и $\alpha, \beta \geqslant 0$.

2) Замыкание конуса есть конус.

3) Если G — собственный конус, то и замыкание $\overline{G}$ — конус собственный.

4) Если F — ограничено и замкнуто и если $0 \notin F$, то $K(F)$ — замкнутый собственный конус.

5) Если K — конус и $\langle h, x_0 + x\rangle \geqslant 0$ при всех $x \in K$, то $\langle h, x\rangle \geqslant 0$ $(\forall x \in K)$.

6) а) Множество $K_0 = (R^n)^+$ векторов с неотрицательными координатами. K_0 замкнут.

б) Множество $K_B = \{x \in R^n : Bx \in (R^m)^+\} = \{x : Bx \geqslant 0\}$, где B — фиксированная матрица. K_B замкнут (докажите!).

в) Множество $K(F) = \{tx : x \in F,\ t \geqslant 0\}$. Если F — выпукло, то $K(F)$ — конус (проверьте!).

г) Множество $K^*(G)$ неотрицательных на G функционалов — конус.

7) $K^*(K^*(G)) = \overline{K(G)}$.

2.2.4. Конус допустимых направлений. Общая теорема отделимости

Пусть G — выпуклое множество и $x_0 \in \overline{G}$. Вектор $h \in R^n$ называется допустимым направлением, если $x_0 + th \in G$ при достаточно малых $t > 0$. Обозначим через $K(G, x_0)$ множество всех таких направлений.

Лемма 2.2.3. *Множество $K(G, x_0)$ является конусом.*

Доказательство очевидно.

Лемма 2.2.4. $[x_0 \notin \operatorname{Int} G] \Longleftrightarrow [K(G, x_0)$ — *собственный конус.*$]$

Теорема 2.2.6. *Для любой точки $x_0 \notin \operatorname{Int} G$ существует нетривиальный линейный функционал l такой, что $l(x_0) \leqslant l(x)$ для всех $x \in G$.*

Доказательство.

Случай $x_0 \notin \overline{G}$ рассмотрен ранее.

Пусть $x_0 \in \overline{G}$. Тогда $K(G, x_0)$ — собственный конус. Пусть l — положительный на $K(G, x_0)$ функционал. Тогда для любого $x \in G$ очевидно, что $x - x_0 \in K(G, x_0)$. Поэтому $l(x - x_0) \geqslant 0$, т. е. $l(x) \geqslant l(x_0)$.

Следствие 2.2.2. *Пусть G — выпуклое множество и $x_0 \in \overline{G}$, причем $x_0 \notin \operatorname{Int} G$. Тогда существует опорная в точке x_0 к G гиперплоскость.*

Теорема 2.2.7. *Пусть G_1 и G_2 — выпуклые множества, причем $G_1 \cap \operatorname{Int} G_2 = \varnothing$. Тогда существует разделяющий G_1 и G_2 функционал l, т. е. $l(x) \geqslant l(y)$ при любых $x \in G_1$, $y \in G_2$.*

Доказательство.

Рассмотрим множество $F = G_2 - G_1$, образованное из разностей вида $(y - x)$ при $x \in G_1, y \in G_2$. Очевидно, F — выпукло, причем $\operatorname{Int} F \not\ni 0$. Поэтому (теорема 2.2.6) существует функционал l такой, что $l(0) \leqslant l(z)$ для любого $z \in F$. Но это значит, что $l(y - x) \geqslant 0$ для любых $y \in G_2$, $x \in G_1$.

Упражнение. Пусть $G = \{x : l_i(x) \geqslant c_i,\ i = \overline{1, m}\}$, где l_i — линейные функционалы. Пусть $x_0 \in G$ и $I = \{i_k\}_{k=1}^{\nu}$ — набор всех индексов таких, что $l_i(x) = c_i \quad (i \in I)$. Доказать, что $K(G, x_0) = \{h : l_i(h) \geqslant 0,\ i \in I\}$.

2.2.5. Крайние точки

Пусть G — выпуклое множество. Точка $x_0 \in \overline{G}$ называется крайней для G, если она не является внутренней ни для одного из отрезков из G. Другими словами, если для любого $h \in R^n$ и любого $\varepsilon > 0$ точки $x_0 + \varepsilon h$ и $x_0 - \varepsilon h$ не могут входить в G одновременно. Множество крайних для G точек обозначим через $\operatorname{ex} G$. Очевидно, $\operatorname{ex}[u, v] = \{u, v\}$. Для треугольника крайние точки — его вершины. Для замкнутого евклидова шара $T = \{x : \langle x, x\rangle \leqslant 1\}$ его край совпадает со сферой $S = \{x : \langle x, x\rangle = 1\}$ (докажите!).

Лемма 2.2.5. *Для любой грани G_0 замкнутого выпуклого множества G справедливо $\operatorname{ex} G_0 \subset \operatorname{ex} G$.*

Доказательство.

Пусть $x_0 \in \operatorname{ex} G_0$. Так как G_0 замкнуто и выпукло, то $x_0 \in G_0$. Пусть l — соответствующий опорный к G в точке x_0 функционал. Тогда $l(x_0) \equiv l(x)$ для всех $x \in G_0$. Причем $l(x) \leqslant l(x_0)$ $(\forall x \in G)$. Если $x_0 \notin \operatorname{ex} G$, то существует направление h_0 такое, что при малых $\varepsilon > 0$ наверняка $x_0 \pm \varepsilon h_0 \in G$. Поэтому $l(x_0 \pm \varepsilon h_0) \leqslant l(x_0)$. Отсюда $\pm\varepsilon l(h_0) \leqslant 0$, т. е. $l(h_0) = 0$. Но тогда $l(x_0 \pm \varepsilon h_0) = l(x_0)$, т. е. $x_0 \pm \varepsilon h_0 \in G_0$, что противоречит включению $x_0 \in \operatorname{ex} G_0$. Лемма доказана.

Теорема 2.2.8. *Для любого замкнутого ограниченного множества существует хотя бы одна крайняя точка.*

Доказательство.

Пусть $\operatorname{ex} G = \emptyset$. Пусть x_0 — произвольная точка из G. Так как x_0 не является крайней, то существует направление h такое, что прямая $x_0 + th$ $(t \in R)$ пересекаются с G по некоторому отрезку $[u, v]$. Если ни одна из точек u, v не является крайней для G, то рассмотрим грань G_0 множества G, содержащую, например, v. По предположению $\mathrm{exG}_0 = \emptyset$. Проведенное рассуждение рекуррентно по размерности, так как $\dim G_0 < \dim G$. Повторение этих рассуждений приведет к одномерной грани, которая является отрезком и, следовательно, имеет непустой край.

Упражнения

1) $[x_0 \in \operatorname{ex} G] \iff [K(G, x_0)$ не содержит противоположных элементов$]$.

2) У любого конуса крайней точкой может быть только нуль. Если конус K замкнут, то $\{0\} = \operatorname{ex} K$ тогда и только тогда, когда K не содержит ни одной прямой.

3) Доказать теорему, ослабив предположение ограниченности G условием: G не содержит целиком ни одной прямой.

2.2.6. Теорема Каратеодори

Теорема 2.2.9. *Пусть G выпукло, ограничено и замкнуто. Тогда*

$$\operatorname{co}(\operatorname{ex} G) = G.$$

Доказательство проведем индукцией по размерности G, т. е. по размерности минимального (по включению) линейного многообразия, содержащего G. Относительно этого многообразия G имеет непустую внутренность.

При $\dim G = 1$ множество G совпадает с некоторым отрезком вида $[u, v] = \{\alpha u + \beta v : \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geqslant 0\}$ и утверждение очевидно.

Пусть теорема верна для любого G при $\dim G < m$. Рассмотрим произвольное множество F (выпуклое, замкнутое, ограниченное), для которого $\dim F = m$. По предыдущей теореме $\operatorname{ex} F \neq \varnothing$. Пусть z_0 — некоторая точка из $\operatorname{ex} F$ и x — произвольная точка F. Беря прямую $\{z_0 + \lambda(x - z_0) : \lambda \in R\}$ в качестве ее пересечения с G, получим отрезок $[z_0, z_1]$, где z_1 — граничная точка F. Пусть G_0 — грань F, содержащая z_1. Так как $\dim G_0 < m$, то по предположению индукции $z_1 \in \operatorname{co}(\operatorname{ex} G_0)$. Но $x \in \operatorname{co}\{z_0, z_1\}$, причем $z_0 \in \operatorname{ex} F$. Значит, $x \in \operatorname{co}(\{z_0\} \cup \operatorname{co}(\operatorname{ex} G_0)) = \operatorname{co}(\{z_0\} \cup \operatorname{ex} G_0) \subset \operatorname{co}(\operatorname{ex} F)$.

Следствие 2.2.3. *Пусть l — линейный функционал, и G — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество. Тогда*

$$\min_G l = \min_{\operatorname{ex} G} l. \tag{2.2.7}$$

Доказательство.

Пусть $x_0 \to \min\limits_G l$. Тогда $x_0 = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_m z_m$ при $z_i \in \operatorname{ex} G$ и $\alpha \geqslant 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$. Так как $l(z_i) \geqslant l(x_0)$, то

$$l(x_0) = \alpha_1 l(z_1) + \ldots + \alpha_m l(z_m) \geqslant (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) l(x_0) = l(x_0).$$

Значит, $\alpha_i l(z_i) = \alpha_i l(x_0)$ при всех i. Но $\alpha_{i_o} \neq 0$ при некотором i_o (так как $\sum \alpha_i = 1$). Поэтому $l(z_{x_0}) = l(x_0)$, т. е. $z_{x_0} \to \min\limits_G l$. Но $z_{i_0} \in \operatorname{ex} G$.

Напомним, что выпуклую оболочку конечного числа точек мы называем многогранником.

Упражнения

1) Многогранник совпадает с пересечением конечного числа полупространств.

2) Экстремальное равенство (2.2.7) справедливо для вогнутого функционала l, когда $l\left(\sum\limits_{i=1}^m \alpha_i z_i\right) \geqslant \sum\limits_1^m \alpha_i l(z_i)$ для любых $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_1^m \alpha_i = 1$.

2.2.7. Замкнутые конусы

Напомним, что множество K по определению есть конус, если K содержит все конечные неотрицательные комбинации $\sum \alpha_i u_i$ $(\alpha_i \geqslant 0)$ своих элементов $u_i \in K$. Конус $K \subset R^n$ собственный, если $K \neq R^n$. В силу выпуклости K должно быть $[K \neq R^n] \iff [\overline{K} \neq R^n]$. Конус K_0 векторов с неотрицательными координатами наверняка замкнут. Конусом является и множество $K(G)$ всех неотрицательных комбинаций элементов из G (коническая оболочка G), и множество $K^*(G)$ всех неотрицательных на G функционалов. Очевидно, $K^*(G)$ всегда замкнут (докажите!).

Теорема 2.2.10. *Коническая оболочка конечного набора векторов всегда замкнута.*

Доказательство.

Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$. Пусть вначале набор G линейно независим. Тогда $K(G)$ изоморфен множеству неотрицательных наборов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, т. е. конусу $K_0 \subset R^m$, который замкнут.

Рассмотрим теперь общий случай, когда набор $G = \{g_i\}_i^m$, вообще говоря, линейно зависим (например, если $m > n$). Будем рассматривать различные поднаборы индексов $\Omega = \{i_1, \ldots, i_\nu\}$ из $\{1, 2, \ldots, m\}$. Скажем, что набор Ω имеет тип Δ (принадлежит Δ), если соответствующий набор $\{g_i\}_{i\in\Omega}$ линейно независим. Обозначим через K_Ω коническую оболочку набора g_i при $i \in \Omega$. Если $\Omega \in \Delta$, то конус K_Ω замкнут. Очевидно, $K_\Omega \subset K(G)$ при любом Ω. Поэтому $\bigcup\limits_{\Omega\in\Delta} K_\Omega \subset K(G)$. При этом $F = \bigcup\limits_{\Omega\in\Delta} K_\Omega$ — замкнутое множество. Если удастся показать, что

$$F = \bigcup_{\Omega\in\Delta} K_\Omega \supset K(G), \tag{2.2.8}$$

то тогда множество $K(G) = F$ должно оказаться замкнутым, как объединение конечного числа замкнутых множеств K_Ω. Докажем (2.2.8).

Пусть x — элемент из $K(G)$, т. е. $x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_m g_m$ при $\alpha_i \geqslant 0$. Выбрасывая здесь нулевые коэффициенты, будем иметь

$$x = \sum_{i\in\Omega} \alpha_i g_i, \tag{2.2.9}$$

где Ω — набор всех индексов, при которых $\alpha_i \neq 0$. Если $\Omega \in \Delta$, то $x \in F$. Если же $x \notin F$, то в (2.2.9) $\Omega \notin \Delta$. По определению Δ это значит, что набор $\{g_i\}_{i\in\Omega}$ линейно зависим. Поэтому для некоторого нетривиального набора $\{\beta_i\}_{i\in\Omega}$ должно быть

$$\sum_{i\in\Omega} \beta_i g_i = 0. \tag{2.2.10}$$

Можно считать, очевидно, что среди β_i есть хотя бы одно положительное число. Домножая (2.2.10) на произвольное $\lambda \in R$ и вычитая из (2.2.9), имеем

$$x = \sum_{i\in\Omega} (\alpha_i - \lambda\beta_i) g_i. \tag{2.2.11}$$

Обозначим через Λ множество λ таких, что $(\alpha_i - \lambda\beta_i) > 0$ при всех $i \in \Omega$. Положим $\lambda_0 = \sup \Lambda$. Очевидно, $\dfrac{1}{\lambda_0} = \max\limits_{i\in\Omega} \beta_i/\alpha_i$. Пусть i_0 — такой индекс из Ω, что $\alpha_{i_0} - \lambda_0\beta_{i_0} = 0$. Положим $\gamma_i = \alpha_i - \lambda_0\beta_i$ и $\Omega_0 = \Omega \setminus \{i_0\}$. Тогда вместо (2.2.11) будем иметь аналогичное (2.2.9) представление $x = \sum\limits_{i\in\Omega_0} \gamma_i g_i$ с неотрицательными γ_i. Поэтому $x \in K_{\Omega_0}$, причем $\Omega_0 \subset \Omega$ и число элементов в Ω_0 строго меньше, чем в Ω. Если $\Omega_0 \notin \Delta$, то рассуждения можно продолжить далее. Вследствие конечности Ω через конечное число шагов будет получен такой набор $\Omega_1 \subset \Omega$, что $\Omega_1 \in \Delta$ и $x \in K_{\Omega_1}$, т. е. окажется $x \in F$.

2.2.8. Теорема Фаркаша

Для произвольной (не обязательно квадратной матрицы) B множество BK_0 — образ конуса K_0 (множества векторов с неотрицательными координатами). Очевидно, BK_0 — конус. Из предыдущей теоремы вытекает

Лемма 2.2.6. *Конус BK_0 замкнут.*

Доказательство.

Для любого $x \in BK_0$ имеем $x = Bh$ при некотором $h \in K_0$. Если $h = (h^1, \ldots, h^n)$, то $h^i \geqslant 0$ при всех i. Обозначая i-ый столбец B через b_i, мы можем переписать равенство $x = Bh$ в виде $x = h^1 b_1 + \ldots + h^n b_n$, т. е. x является неотрицательной комбинацией векторов $\{b_i\}$. Таким образом, BK_0 является конической оболочкой набора $\{b_i\}$, откуда в силу предыдущей теоремы следует требуемое.

Напомним, что $K^*(G)$ — множество положительных на G функционалов. Очевидно, $K^*(G)$ всегда замкнут, причем $K^*(G) = K^*(K(G))$, т. е. $K^*(G)$ совпадает с множеством функционалов, положительных на конической оболочке $K(G)$ множества G. Если G — конус, то обычно пишут $K^*(G) = G^*$. Очевидно, что $K_0^* = K_0$. Напомним также, что множество $K_B = \{x : Bx \geqslant 0\} = \{x : Bx \in K_0\}$ также является конусом, замкнутость K_B очевидна.

Теорема 2.2.11. $(K_B)^* \subset B^* K_0$.

Доказательство.

В предположении противного существует элемент $y \in (K_B)^*$, не принадлежащий B^*K_0. В силу замкнутости B^*K_0 это множество можно отделить от y ненулевым функционалом, т. е. существует вектор h такой, что $\langle h, y\rangle < 0$ и $\langle h, B^*x\rangle \geqslant 0$ для любого $x \in K_0$. Но тогда $\langle Bh, x\rangle \geqslant 0$ $(\forall x \in K_0)$. Поэтому $Bh \in K_0^* = K_0$, т. е. $h \in K_B$, что противоречит неравенству $\langle h, y\rangle < 0$ при $y \in (K_B)^*$. Теорема доказана.

2.3. Выпуклые функционалы

Пусть G — выпуклое множество из R^n. Функционал $\varphi : G \to R^1$ называется выпуклым, если $\varphi(\alpha x+\beta y) \leqslant \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$ для любых $\alpha, \beta \geqslant 0 \quad (\alpha+\beta=1)$ и $x, y \in G$. Таким является любой линейный функционал. Если $\varphi : G \to R^1$ и $f : R^1 \to R^1$ — выпуклые функционалы, то выпуклой будет и суперпозиция $\Phi(x) = f(\varphi(x))$.

Лемма 2.3.1. *Если A — симметрична и положительно определена, то функционал $\varphi(x) = \langle Ax, x\rangle$ выпуклый.*

Доказательство.
При $x, y \in G$ и $\alpha+\beta = 1$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$ имеем $\varphi(\alpha x+\beta y) - \alpha\varphi(x) - \beta\varphi(y) = \langle \alpha Ax + \beta Ay, \alpha x + \beta y\rangle - \alpha\langle Ax, x\rangle - \beta\langle Ay, y\rangle = \alpha(\alpha-1)\langle Ax, x\rangle + 2\alpha\beta\langle Ax, y\rangle + \beta(\beta-1)\langle Ay, y\rangle$ и, так как $\alpha+\beta = 1$, это равно $-\alpha\beta\langle A(x-y), x-y\rangle \leqslant 0$ в силу условия.

Лемма 2.3.2. *Для выпуклости φ на G необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, x+h \in G$ и $\lambda \in [0,1]$ было $\varphi(x+\lambda h) - \varphi(x) \leqslant \lambda[\varphi(x+h) - \varphi(x)]$.*

Доказательство следует из определения (покажите!).

Теорема 2.3.1. *Пусть G и φ выпуклы. Тогда множество точек локального минимума φ на G связно и на нем $\varphi(x) = \mathrm{const}$.*

Доказательство.
Покажем вначале, что если x_0 дает локальный минимум φ на G, то $\varphi(x_0) = \inf_G \varphi$.

В предположении противного $\varphi(y) < \varphi(x_0)$ для некоторой $y \in G$. Но тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ (лемма 2.3.2) $\varphi(x_0+\varepsilon(y-x_0)) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon[\varphi(y) - \varphi(x_0)] < \varphi(x_0)$, что противоречит предположению. Множество $\{x : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$, состоящее только из точек минимума, выпукло в силу выпуклости φ.

Упражнения

1) Множество всех выпуклых на G функционалов — конус.

2) Для выпуклости φ на G необходимо, чтобы $\varphi(\sum \alpha_i x_i) \leqslant \sum \alpha_i \varphi(x_i)$ для любых $x_i \in G$ и $\alpha_i \geqslant 0$ $(\sum \alpha_i = 1)$.

3) Если φ — выпуклый, то множество $\{x : \varphi(x) \leqslant C\}$ выпукло.

2.3.1. Регулярность выпуклого функционала

Выпуклость функционала влечет его непрерывность и дифференцируемость.

Теорема 2.3.2. *Пусть φ — выпуклый на G функционал. Тогда φ дифференцируем в каждой точке $x_0 \in G$ по любому допустимому направлению $h \in K(G, x_0)$.*

Доказательство.
Пусть $x_0 \in G$ и $h \in K(G, x_0)$. Рассмотрим функцию $\psi(t) = \varphi(x_0+th)$. Она выпукла. Поэтому для любых положительных $t < s$ должно быть $\psi(t+\alpha(s-t)) - \psi(t) \leqslant \alpha[\psi(s) - \psi(t)]$ при $\alpha \in [0,1]$. Беря α произвольным и полагая $t+\alpha(s-t) = \tau$, будем иметь, что $\psi(\tau) - \psi(t) \leqslant \dfrac{\tau-t}{s-t}[\psi(s)-\psi(t)]$ при любых $t < \tau < s$. Но это значит, что отношение $f(\tau) = \dfrac{\psi(\tau)-\psi(t)}{\tau - t}$ есть монотонно возрастающая по τ функция. Она имеет поэтому предел при $\tau \downarrow t$, равный $\psi'(t+0)$. Конечность этой производной при $t > 0$ показывается аналогично. Если $-h \notin K(G, x_0)$, то в точке $t = 0$ эта производная может быть и бесконечной.

Замечание 2.3.1. Если x_0 — внутренняя в G, то φ имеет в точке x_0 конечную производную по любому направлению.

Теорема 2.3.3. *Выпуклый на G функционал непрерывен в каждой внутренней точке.*

Доказательство.
Если $x_0 \in \mathrm{Int}G$, то для любого $h \in R^n$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $x_0 \pm \varepsilon h \in G$ и $\varphi(x_0 \pm \varepsilon h) - \varphi(x_0) \leqslant \pm\varepsilon[\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)]$, что означает $\varphi(x_0+th) \to \varphi(x_0)$ при $t \to 0$. Значит, φ непрерывен в точке x_0 по каждому направлению. Обозначим $f(h) = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)$.

Введя норму $||h|| = \max\limits_i h^i$, в качестве единичного шара $T = \{h : ||h|| \leqslant 1\}$ будем иметь куб с конечным числом вершин $\{u_i\}_1^m$. По теореме Каратеодори для любого элемента h при некоторых $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_1^m \alpha_i = 1$ должно быть $\dfrac{h}{||h||} = \sum \alpha_i u_i$, т. е. $h = \sum \alpha_i ||h|| u_i$. В силу выпуклости φ и $|f|$ имеем

$$|f(h)| = \left| f\left(\sum_1^m \alpha_i ||h|| u_i\right)\right| \leqslant \sum_1^m \alpha_i |f(||h||u_i)|. \tag{2.3.1}$$

Из непрерывности в нуле каждой из функций $\psi(t) = |f(tu_i)|$ следует, что $\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta_i > 0)\forall(t : |t| < \delta_i)[\psi(t) < \varepsilon/m]$. Полагая $\delta_0 = \min\limits_i \delta_i$, получим в силу (2.3.1), что $|f(h)| < \varepsilon$ при $||h|| < \delta_0$. Теорема доказана.

2.3.2. Критерий выпуклости и оптимальности

Рассматриваемый функционал $\varphi : G \to R^1$ предполагается дифференцируемым в каждой точке выпуклого множества $G \subset R^n$. Градиент его мы будем обозначать через $\varphi'(x_0) = \operatorname{grad}\varphi(x_0) = (\dfrac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x^n})$, так что $\dfrac{d}{dt}\varphi(x_0 + th)|_{t=0} = = \langle\varphi'(x_0), h\rangle$.

Теорема 2.3.4. *Для выпуклости φ на G необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle\varphi'(x_0), h\rangle \leqslant \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \tag{2.3.2}$$

для любых $x_0, x_0 + h \in G$.

Доказательство.

Выпуклость φ на G эквивалентна тому, чтобы

$$\frac{\varphi(x_0 + \lambda h) - \varphi(x_0)}{\lambda} \leqslant \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \\ (x_0, x_0 + h \in G;\ \lambda \in (0, 1]). \tag{2.3.3}$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \downarrow 0$, получаем (2.3.2) как следствие выпуклости φ. Покажем, что (2.3.2)$\Rightarrow$(2.3.3). Для этого достаточно показать, что из (2.3.2) следует выпуклость функции $\psi(t) = \varphi(x_0 + th)$.

В силу (2.3.2) для любых t, t' справедливо

$$\psi(t') - \psi(t) \geqslant \psi'(t)(t' - t);$$

меняя здесь t и t' ролями, имеем

$$\psi(t) - \psi(t') \geqslant \psi'(t')(t - t').$$

Сложение обоих неравенств дает $[\psi'(t) - \psi'(t')](t - t') \geqslant 0$, что означает возрастание по t функции $\psi'(t)$. А из возрастания ψ' следует выпуклость ψ (проверьте сами!).

Для выпуклых φ и G рассматривается задача

$$\varphi \to \min_G. \tag{2.3.4}$$

Точка x_0 оптимальна для (2.3.4), если $x_0 \to \min\limits_G \varphi$.

Теорема 2.3.5 (критерий оптимальности). *Пусть φ дифференцируем на G. Для оптимальности x_0 в (2.3.4) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle\varphi'(x_0), h\rangle \geq 0 \quad (h \in K(G, x_0)). \tag{2.3.5}$$

Доказательство.

Из (2.3.5) оптимальность x_0 в (2.3.4) следует в силу критерия выпуклости. Пусть x_0 оптимальна в (2.3.4). Тогда для любого $h \in K(G, x_0)$ при малых $t > 0$ имеем $\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0) \geq 0$, откуда после деления на t в пределе (при $t \downarrow 0$) получим (2.3.5).

2.3.3. Условия Слейтера

Рассматривается выпуклый функционал $\varphi : R^n \to R^1$ на множестве

$$G = \{x : f_i(x) \leqslant C_i, \quad i = \overline{1, m}\}, \tag{2.3.6}$$

где $f_i : R^n \to R^1$ выпуклы. Задача выпуклого программирования: $\varphi \to \min\limits_G$. Выпуклость множества G очевидна. Если в (2.3.6) f_i заменить опять же выпуклыми функционалами $[f_i(x) - C_i]$, то множество G удобно записать в виде

$$G = \{x : f_i(x) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}\}. \tag{2.3.7}$$

Условие Слейтера. $\forall(i)\exists(x_i \in G)[f_i(x_i) < 0]$.

Это условие означает, что в (2.3.7) ни одно из неравенств $f_i(x) \leqslant 0$ не вырождается на G в тождественное равенство $f_i(x) \equiv 0$.

Теорема 2.3.6. *Для выполнения условия Слейтера необходимо и достаточно существование точки $x^* \in G$ такой, что $f_i(x^*) < 0$ для всех i.*

Доказательство.

Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости возьмем точки x_i такие, что $f_i(x_i) < 0$ при всех i. Для произвольных $\alpha_i > > 0$ ($\sum\limits_1^n \alpha_i = 1$) положим $x^* = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$. Тогда в силу выпуклости каждого f_i

$$f_i(x^*) = f_i\left(\sum_1^m \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_1^m \alpha_k f_i(x_k). \tag{2.3.8}$$

Так как $x_k \in G$, то $f_i(x_k) \leqslant 0$, причем $f_i(x_i) < 0$. Значит, правая часть в (2.3.8) строго отрицательна.

2.3.4. Функция Лагранжа. Седло

Для задачи выпуклого программирования

$$\begin{cases} \varphi \to \min\limits_G, \\ G = \{x : f(x) \leqslant 0\} \qquad (f = (f_1, \dots, f_n)) \end{cases}$$

вводится функция Лагранжа

$$L(x, y) = \varphi(x) + \langle y, f(x) \rangle, \tag{2.3.9}$$

определяемая на $G \times K_0$, т. е. при $x \in G$ и $y \in K_0 \subset R^m$. Покоординатно

$$L(x, y) = \varphi(x) + \sum_1^m y^i f_i(x).$$

Определение 2.3.1. *Точка* $(x_0, y_0) \subset G \times K_0$ *называется седловой, если*

$$L(x_0, y) \leqslant L(x_0, y_0) \leqslant L(x, y_0) \quad (x \in G,\ y \in .K_0) \tag{2.3.10}$$

Теорема 2.3.7. *Если точка* (x_0, y_0) *седловая, то* x_0 — *оптимальная, т. е.* $x_0 \to \min\limits_G \varphi$.

Доказательство.
Согласно (2.3.9) левое из неравенств (2.3.10) влечет $\langle y, f(x_0) \rangle \leqslant \langle y_0, f(x_0) \rangle$ для любого $y \in K_0$, это число неположительно, так как $\langle y_0, f(x_0) \rangle = y_0^1 f_1(x_0) + \ldots + y_0^m f_m(x_0)$ и все слагаемые неположительны ($y_0 \in K_0$, $x_0 \in G$, т. е. $f_i(x_0) \leqslant 0$). Значит, $\langle y_0, f(x_0) \rangle = 0$. Но тогда правое из неравенств (2) дает

$$\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) + \langle y_0, f(x) \rangle \quad (x \in G),$$

причем аналогично предыдущему $\langle y_0, f(x) \rangle \leqslant 0$. Поэтому $\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x)$ для любого $x \in G$.

Эта теорема допускает обращение при условии Слейтера.

2.3.5. Теорема Куна–Таккера

Задача выпуклого программирования $\varphi \to \min\limits_G$, $G = \{x : f(x) \leqslant 0\}$.

Теорема 2.3.8. *Пусть* $x_0 \to \min\limits_G \varphi$ *и выполняется условие Слейтера. Тогда существует* $y_0 \in K_0$ *такой, что точка* (x_0, y_0) — *седловая.*

Доказательство.

1 часть (применимость теоремы отделимости).

Рассмотрим $(m+1)$-мерное пространство элементов $\widetilde{y} = \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix}$ при $\lambda \in R^1$ и $y \in R^m$. Введем множество $P = \left\{ \widetilde{y} = \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix} : \begin{matrix} \lambda & \leqslant & \varphi(x_0) \\ y & \leqslant & 0. \end{matrix} \right\}$.

Полагая $\widetilde{y}^* = \begin{pmatrix} \varphi(x_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, множество P можно проще записать в виде $P = \{\widetilde{y} : \widetilde{y} \leqslant y^*\} = \widetilde{y}^* - \widetilde{K}_0$, где $\widetilde{K}_0$ — конус $(m+1)$-векторов с неотрицательными координатами. $\widetilde{K}_0$ телесен. Поэтому и P телесно, причем $\mathrm{Int} P = \overset{0}{P} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix} : \begin{matrix} \lambda < \varphi(x_0) \\ z < f(x) \end{matrix} \right\}$.

При каждом $x \in G$ введем в рассмотрение множество

$$Q(x) = \left\{ \widetilde{z} = \begin{pmatrix} \mu \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mu \geqslant \varphi(x) \\ z \geqslant f(x) \end{matrix} \right\}.$$

Полагая $\widetilde{z}^* = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$ при фиксированном x, его можно представить в виде $Q(x) = \{\widetilde{z} : \widetilde{z} \geqslant \widetilde{z}^*\} = \widetilde{z}^* + \widetilde{K}_0$. Поэтому каждое $Q(x)$ выпукло. Рассмотрим множество $Q = \bigcup\limits_{x \in G} Q(x)$.

Лемма 2.3.3. *Множество* Q *выпукло.*

Доказательство.
Пусть $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2 \in Q$ и $\alpha, \beta \geqslant 0$ $(\alpha + \beta = 1)$. Пусть x_1 и x_2 таковы, что $\widetilde{z}_1 \in Q(x_1)$ и $\widetilde{z}_2 \in Q(x_2)$. Покажем, что $\alpha\widetilde{z}_1 + \beta\widetilde{z}_2 \in Q(\alpha x_1 + \beta x_2)$.) Для этого нужно доказать неравенства

$$\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \geqslant \varphi(\alpha x_1 + \beta x_2), \tag{2.3.11}$$

$$\alpha z_1 + \beta z_2 \geqslant f(\alpha x_1 + \beta x_2). \tag{2.3.12}$$

Из выпуклости φ, f следует, что $\varphi(\alpha x_1+\beta x_2) \leqslant \alpha\varphi(x_1)+\beta\varphi(x_2)$ и $f(\alpha x_1+ + \beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$, причем $\varphi(x_1) \leqslant \mu_1$, $f(x_1) \leqslant z_1$ по определению $Q(x_1)$ и $\varphi(x_2) \leqslant \mu_2$, $f(x_2) \leqslant z_2$ по определению $Q(x_2)$, что и приводит к (2.3.11) и (2.3.12). Поэтому $\alpha\widetilde{z}_1 + \beta\widetilde{z}_2 \in Q$.

Лемма 2.3.4. $Q\bigcap \mathrm{Int}P = \varnothing$.

Доказательство.

В предположении противного существует элемент $\widetilde{y} = \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix}$, который в силу включения $\widetilde{y} \in \overset{0}{P}$ должен удовлетворять неравенству $\lambda < \varphi(x_0)$, а из $\widetilde{y} \in Q$ должно следовать $\lambda \geqslant \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$, что взаимоисключает оба неравенства.

2 часть доказательства. К множествам P и Q применима теорема отделимости. Существует элемент $h = \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} \in R^{m+1}$ $(h \neq 0)$ такой, что

$$\langle h, \widetilde{y}\rangle \leqslant \langle h, \widetilde{z}\rangle \quad \left(\widetilde{y} = \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix} \in P,\ \widetilde{z} = \begin{pmatrix} \mu \\ z \end{pmatrix} \in Q\right). \tag{2.3.13}$$

Если фиксировать $x \in G$ и взять $\widetilde{y} = \widetilde{y}^*$, то в силу (2.3.13) $\langle h, \widetilde{z}\rangle \geqslant \gamma_0$ при любом $\widetilde{z} \in Q(x)$, причем, напомним, $Q(x) = \widetilde{z}^* + \widetilde{K}_0$. Значит, $h \in \widetilde{K}_0$ (проверьте!), т. е. $\alpha \geqslant 0$, $a \geqslant 0$.

В более развернутой записи (2.3.13) имеет вид

$$\langle h, \widetilde{y}\rangle = \alpha\lambda + \langle a, y\rangle \leqslant \alpha\mu + \langle a, z\rangle = \langle h, \widetilde{z}\rangle. \tag{2.3.14}$$

Неравенства (2.3.14) справедливы при любых $\lambda \leqslant \varphi(x_0)$, $y \leqslant 0$ (так как $\widetilde{y} \in \in P$) и любых $\mu \geqslant \varphi(x)$, $z \geqslant f(x)$ и каждом $x \in G$ (так как $\widetilde{z} \in Q$).

Подставляя в (2.3.14) крайние из этих значений, получим

$$\alpha\varphi(x_0) + \langle a, 0\rangle \leqslant \alpha\varphi(x) + \langle a, f(x)\rangle. \tag{2.3.15}$$

Отсюда, если $\alpha = 0$, получается $\langle a, f(x)\rangle \geqslant 0$. Но $a \geqslant 0$ и $f(x) \leqslant 0$. Поэтому $\langle a, f(x)\rangle \leqslant 0$, т. е. $\langle a, f(x)\rangle \equiv 0$ при всех $x \in G$. Поэтому

$$a^1 f_1(x) + a^2 f_2(x) + \ldots + a^m f_m(x) = 0,$$

причем $a^i f_i(x) \leqslant 0$ $(i = \overline{1, m})$. Значит, $a^i f_i(x) = 0$ при каждом i и любом $x \in G$. Так как $h = \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} \neq 0$, то предположение $\alpha = 0$ означает, что $a \neq 0$, т. е. среди координат a^i вектора a есть ненулевая a^{i_0}. Значит, $f_{i0} = 0$ при всех $x \in G$, что противоречит условию Слейтера. Значит, $\alpha \neq 0$, т. е. $\alpha > 0$.

Положим в (2.3.15) $y_0 = a/\alpha$. Тогда

$$\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) + \langle y_0, f(x)\rangle \quad (x \in G). \tag{2.3.16}$$

Отсюда при $x = x_0$ следует $0 \leqslant \langle y_0, f(x_0)\rangle$. Но $y_0 \geqslant 0$ и $f(x_0) \leqslant 0$. Поэтому $\langle y_0, f(x_0)\rangle \leqslant 0$, т. е.

$$\langle y_0, f(x_0)\rangle = 0; \tag{2.3.17}$$

отсюда и из (2.3.16) следует

$$\begin{aligned} L(x_0, y_0) = \varphi(x_0) + \langle y_0, f(x_0)\rangle \leqslant \\ \leqslant \varphi(x) + \langle y_0, f(x)\rangle = L(x, y_0) \quad (y_0 \in K_0). \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

С другой стороны, так как $\langle y, f(x_0)\rangle \leqslant 0$ при $y \in K_0$, то с учетом (2.3.17)

$$\begin{aligned} L(x_0, y) = \varphi(x_0) + \langle y, f(x_0)\rangle \leqslant \\ \leqslant \varphi(x_0) + \langle y_0, f(x_0)\rangle = L(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.3.18) следует, что (x_0, y_0) — седловая точка. Теорема доказана.

Глава 3

Элементы теории оптимального управления

3.1. Линейные задачи быстродействия

Важнейшая для приложения задача оптимального управления — задача о линейных быстродействиях — ставится так.

Рассматривается конечномерный объект, однозначно определяемый в каждый момент времени конечным набором параметров $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x \in R^n$. Эволюция x во времени — некоторая кривая $x(t)$ $\quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ в пространстве всех состояний R^n, называемом фазовым пространством. На эволюцию (поведение) x влияют некоторые контролируемые внешние воздействия, определяемые конечным набором параметров $(u_1, \dots, u_m) = u$, называемом управлением. В целом управляемый объект определяется системой

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (u \in U), \tag{3.1.1}$$

где A и B — матрицы (A — квадратная, B — $(n \times m)$-матрица), а U — множество всех допустимых значений управления u ($U \subset R^m$). Обычно в качестве U фигурирует многогранник.

При постановке задачи считаются заданными начальное x^0 и конечное x^1 состояния объекта. Говорят, что управление $u(t)$, заданное на отрезке $[t_0, t_1]$, переводит x^0 в x^1 (мы будем писать $u(t) : x^0 \rightsquigarrow x^1$), если система

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \tag{3.1.2}$$

получаемая при подстановке $u(t)$ в (3.1.1), имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее условиям

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1. \tag{3.1.3}$$

В качестве разрешенных для использования управлений мы будем рассматривать кусочно-непрерывные функции. Естественность такого класса объясняется далее. Мы считаем при этом, что в точках разрыва функции $u(\xi) = u(\xi + 0)$. Наличие разрывов (скачков) управления означает наличие разрывов у правой части системы (3.1.2). Что понимается под решением такой системы?

Если $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k$ — все точки разрыва $u(t)$, то на каждом из отрезков $[t_0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \dots, [\tau_k, t_1]$ правая часть системы непрерывна и любая задача Коши для этой системы однозначно разрешима. Взяв решение уравнения (3.1.2) на $[t_0, \tau_1]$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$, мы получим с его помощью точку $x(\tau_1)$, которую можем взять за начальную для (3.1.2) уже на следующем отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ и т. д. Получаемая кривая, склеенная из решений системы (3.1.2), будет непрерывна всюду на $[t_0, t_1]$, имея в точках $\tau_1, \dots, \tau_k$ изломы (скачки производных).

3.1.1. Принцип максимума

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех управлений, переводящих x^0 в x^1. Заметим, что каждому управлению, переводящему x^0 в x^1, соответствует свой отрезок времени $[t_0, t_1]$.

На множестве $\mathfrak{M}$ ставится задача отыскания оптимального управления. Для задачи быстродействия оптимальным является управление, минимизирующее время протекания процесса, т. е. $t_1 - t_0$.

Теорема 3.1.1 (принцип максимума). *Пусть $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ — оптимальное управление для задачи быстродействия. Тогда существует нетривиальное решение $\psi(t)$ системы*

$$\dot{\psi} = -A^* \psi, \tag{3.1.4}$$

на котором почти при всех t

$$\sup_{v \in U} \langle \psi(t), Bv \rangle = \langle \psi(t), Bu(t) \rangle. \tag{3.1.5}$$

Равенство (3.1.5) означает, что $u(t)$ является точкой максимума линейного по v функционала $\varphi(v) = \langle \psi(t), Bv \rangle$. Если U — многогранник, то $u(t) \in \operatorname{ex} U$, то есть совпадает с одной из вершин U, что существенно упрощает задачу.

Позволяет ли принцип максимума отыскать конкретное управление и соответствующую ему оптимальную траекторию? Поясним это для случая, когда $m = 1$, т. е. U — отрезок. Нас интересуют функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $\psi_1(t), \dots$, $\psi_n(t)$ и $u(t)$, т. е. $(2n + 1)$ скалярных функций. Для их отыскания мы имеем n уравнений в (3.1.1), n уравнений в (3.1.4) и одно равенство (3.1.5), т. е. в целом задача замкнута. При решении систем (3.1.4), (3.1.2) появляется $(n+n)$ произвольных постоянных, для фиксации которых имеется $2n$ условий в (3.1.3), т. е. в целом система данных полна для отыскания решений. Если $m > 1$, то равенство (3.1.5) все равно позволяет отыскивать $u(t)$ как точки максимума на U линейного функционала.

3.1.2. Задача о мягкой стыковке

Требуется описать оптимальные быстродействия, переводящие в нуль с нулевой конечной скоростью ($x(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0$)

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1. \tag{3.1.6}$$

Вводя обозначения $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, переходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} |u| \leqslant 1. \tag{3.1.7}$$

Так как здесь $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то в силу принципа максимума

$$\sup_{|v| \leqslant 1} \psi_2(t)v = \psi_2(t)u(t), \tag{3.1.8}$$

где $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ — нетривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

Из (3.1.8) следует, что $u(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t)$, а из (3.1.9) — что $\psi_2(t)$ — линейная функция. Значит, $\psi_2(t)$ меняет знак не более одного раза, т. е. оптимальное управление $u(t) = \operatorname{sign} \Psi_2(t)$ может принимать только два значения ± 1, меняя их не более одного раза. Скачок управления, т. е. момент изменения его значения, называют переключением. Таким образом, оптимальное для (3.1.6) быстродействие имеет не более одного переключения — первое существенное продвижение, полученное для задачи (3.1.6).

Для построения оптимальных траекторий, ведущих в нуль, удобно применять метод «движения вспять». Рассмотрим вначале локальное поведение оптимальных траекторий.

При $u = 1$ решения (3.1.7) точно находятся переходом от (3.1.7) к уравнению $\dfrac{dx_1}{dx_2} = x_2$, откуда

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + C \quad (u = +1) \tag{3.1.10}$$

— семейство парабол, по каждой из которых движение происходит снизу вверх, т. к. из второго уравнения из (3.1.7) $\dot{x}_2 = 1$, т. е. $x_2(t)$ возрастает.

Если же $u = -1$, то решениями (3.1.7) будут параболы

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C \quad (u = -1), \tag{3.1.11}$$

по каждой из которых (в силу равенства $\dot{x}_2 = -1$) движение происходит сверху вниз. Оптимальная траектория должна состоять из кусков кривых (3.1.10), (3.1.11); переход с одной траектории на другую соответствует переключению. Поэтому каждая оптимальная траектория состоит из одного или двух кусков парабол разного типа.

Рассмотрим сначала оптимальные траектории, приводящие в нуль с заключительным значением управления $u = +1$. На этом последнем участке постоянства $u(t)$ мы должны были двигаться вдоль одной из траекторий (3.1.10), из которых через нулевую точку $(0, 0)$ проходит лишь одна парабола $x_1 = \dfrac{x_2^2}{2}$. С учетом направления движения в нуль ведет нижняя ветвь этой параболы. Если у взятого направления имелось переключение, то предшествующему значению $u = -1$ управления соответствует движение вдоль одной из траекторий (3.1.11). Каждая такая траектория, по которой при движении сверху вниз движение происходит до пересечения с траекторией $x_1 = \dfrac{x_2^2}{2}$ (нижняя ветвь), в точке пересечения склеивается с этой ветвью. Множество всех таких склеенных траекторий покрывает всю плоскость $x_1 O x_2$ выше кривой γ, составленной из верхней ветви параболы $x_1 = \dfrac{x_2^2}{2}$ и нижней ветви параболы $x_1 = -\dfrac{x_2^2}{2}$. Аналогично строятся и траектории другого типа, соответствующие управлениям, переключающим $(+1)$ на (-1). Эти траектории покрывают плоскость ниже γ. Кривая γ оказывается линией переключения: выше нее оптимальное управление принимает значение (-1), а ниже ее — значение (+1). Проведенный анализ очень полезно осваивать на фазовой плоскости с помощью карандаша.

3.2. Динамическое программирование

3.2.1. Принцип оптимальности

Рассматривается управляемый объект, описываемый автономной системой

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (u \in U \subset R^m) \tag{3.2.1}$$

с достаточно гладкой $f : R^n \times R^m \to R^n$ в классе кусочно-непрерывных управлений $u(t)$. Мы говорим, что заданная на некотором промежутке $[t_0, t_1]$ кусочно-непрерывная функция $u(t)$ является управлением, переводящим точку $x^0 \in R^n$ в точку $x^1 \in R^n$, если соответствующее решение системы $\dot{x} = f(x, u(t))$, полученной подстановкой в (3.2.1) функции $u = u(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$, принимает при $t = t_1$ значение x^1, то есть $x(t_1) = x^1$. В точках разрыва $u(t)$, где $u(t-0) \neq u(t+0)$, уравнение понимается в виде $\dot{x}(t+0) = f(x(t+0), u(t+0))$. При этом мы говорим только о непрерывных решениях (траекториях). Промежуток $[t_0, t_1]$ для каждого управления свой.

При фиксированных крайних состояниях x^0 и x^1 в R^n на множестве $\mathfrak{M}$ управлений, переводящих x^0 в x^1, оптимальное управление решает задачу

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x, u)\, dt \to \min_{\mathfrak{M}}. \tag{3.2.2}$$

Здесь $J(u) = J(u(\cdot))$ — критерий качества (критерий оптимальности), функция $f_0 : R^n \times R^m \to R^1$ — фиксированная непрерывная функция, в (3.2.2) под интегралом в качестве u и x подставляются управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$, промежуток $[t_0, t_1]$ — область определения управления $u(\cdot)$. Нам удобно считать, что $u(t) = u(t+0)$, то есть что управление $u(t)$ в точках разрыва определено по непрерывности справа.

Следующий результат является центральным в так называемой теории динамического программирования. Вначале — формулировка фигуральная.

Теорема 3.2.1. *Любой кусок оптимальной траектории есть оптимальная траектория.*

Точная формулировка звучит так.

Теорема 3.2.2. *Пусть $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ — оптимальное управление и $x(t)$ — соответствующая ему оптимальная траектория. Пусть $\tau_0 < \tau_1$ — произвольные точки из $[t_0, t_1]$. Рассмотрим множество управлений, переводящих точку $y^0 = x(\tau_0)$ в точку $y^1 = x(\tau_1)$, и соответствующую задачу оптимального перевода y^0 в y^1. Тогда оптимальными для этой задачи будут прежние управление и траектория, суженные на отрезок $[\tau_0, \tau_1]$.*

Доказательство основано на нескольких вспомогательных свойствах. Из автономности системы (3.2.1) следует

Лемма 3.2.1. *Пусть управление $u(t)$, заданное на $[\xi_0, \xi_1]$, переводит z^0 в z^1. Тогда управление $v(t) \equiv u(t+\gamma)$, заданное на $[\xi_0-\gamma, \xi_1-\gamma]$, также переводит z^0 в z^1, не меняя значения критерия качества, т. е. $J(u) = J(v)$.*

Доказательство.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — начатые в точке z^0 решения системы (3.2.1), соответствующие $u(t)$ и $v(t)$. Так как $\dot{y}(t) = f(y(t), v(t))$, то, произведя здесь замену переменной $t = \tau - \gamma$ и пользуясь равенством $v(\tau - \gamma) \equiv u(\tau)$,

будем иметь ($\dot{t} = \dot{\tau}$), что $\dot{y}(\tau-\gamma) = f(y(\tau-\gamma),\, u(\tau))$. В силу единственности решения задачи Коши из равенства $x(\xi_0) = z^0 = y(\xi_0 - \gamma)$ следует, что $x(t) \equiv y(t-\gamma)$ и $y(\xi_1 - \gamma) = z^1$. При этом

$$J(v) = \int\limits_{\xi_0-\gamma}^{\xi_1-\gamma} f_0(y(t), v(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} f_0(y(t-\gamma), v(t-\gamma))\, dt = \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} f_0(x(t), u(t))\, dt = J(u).$$

Определение 3.2.1. *Суперпозицией управлений $u(\tau) : [\xi_0, \xi_1] \to U$ и $v(t) : [\eta_0, \eta_1] \to U$ называется управление $w(t)$, определяемое на промежутке $[\xi_0, \xi_1 + \eta_1 - \eta_0]$ равенством*

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & \xi_0 \leqslant t < \xi_1, \\ v(t + \eta_0 - \xi_1), & \xi_1 \leqslant t \leqslant \xi_1 + \eta_1 - \eta_0. \end{cases}$$

Суперпозицию $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ будем обозначать через $u \oplus v$.

Лемма 3.2.2. *Если управление $u(t)$ переводит точку x^0 в x^1, а $v(t)$ переводит точку x^1 в точку x^2, то суперпозиция $u \oplus v$ переводит x^0 в x^2, причем $J(u \oplus v) = J(u) + J(v)$, а соответствующая $u \oplus v$ траектория сращена из траекторий $x(t)$ и $y(t)$, соответствующих управлениям $u(t)$ и $v(t)$.*

Доказательство очевидно ввиду леммы 3.2.1.

Доказательство теоремы 3.2.2 . Представим данное оптимальное управление $u(t)$ в виде $u = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3$, где u_1, u_2, u_3 определены соответственно на $[t_0, \tau_0]$, $[\tau_0, \tau_1]$, $[\tau_1, t_1]$. Рассмотрим задачу $x(\tau_0) \rightsquigarrow x(\tau_1)$. Если теорема не верна, то $u_2(t)$ не оптимально в этой задаче, т. е. существует управление $v(t) : x(\tau_0) \rightsquigarrow x(\tau_1)$, для которого $J(v) < J(u_2)$. Но тогда суперпозиция $u_1 \oplus v \oplus u_3 = w$ переводит x^0 в x^1, причем $J(w) = J(u_1) + J(v) + J(u_3) < J(u)$, что противоречит оптимальности исходного $u(t)$.

Доказанная теорема позволяет сформулировать следующий фундаментальный *принцип динамического программирования* Беллмана.

В каждой точке оптимальной траектории выбор дальнейшего оптимального управления не зависит от предыстории. Другими словами, если $x(\cdot)$ — оптимальная траектория и $z = x(\xi)$ — какая-то ее точка, то оптимальное управление $u(t)$ при $t > \xi$ может определяться самостоятельно, без связи со значениями $u(t)$ при $t \leqslant \xi$.

Этот принцип делает корректным понятие функции синтеза.

Пусть в рассматриваемой задаче конечная точка x^1 фиксирована. Обозначим через $X \subset R^n$ множество точек, из каждой из которых возможен оптимальный переход в x^1. Если $z \in X$ и $x(t)$ — оптимальная траектория, проходящая через z, т. е. $z = x(\xi)$, то значение $u(\xi) = u(\xi + 0)$ соответствующего $x(t)$ оптимального управления $u(t)$ в этой точке $z = x(\xi)$ обозначим через $u(z)$, т. е. $u(z) \equiv u(\xi)$. Очевидно, $u(x(t)) \equiv u(t)$.

Знание функции синтеза $u(z)$ сводит задачу управления объектом (3.2.1) к детерминированной задаче решения уравнения $\dot{x} = f(x, u(x))$.

3.2.2. Уравнение Беллмана для задачи быстродействия

Для управляемого в R^n объекта

$$\dot{x} = f(x,u) \quad (u \in U \subset R^m) \tag{3.2.3}$$

с достаточно гладкой f рассматривается задача быстродействия в фиксированное конечное состояние x^1. Пусть X — множество точек из R^n, каждую из которых можно перевести (некоторым управлением) в x^1. Обозначим через $T(x)$ — время оптимального перевода $x \rightsquigarrow x^1$.

Пусть Ω — открытое множество в R^n, на котором функция $T(x)$ определена и дифференцируема. Очевидно, $\Omega \subset X$. Для произвольной точки $x^0 \in \Omega$ обозначим через $u(t)$ и $x(t)$ оптимальные управление и траекторию, переводящие x^0 в x^1, причем $x^0 = x(t_0)$ и $u(t_0) = u(x^0)$, здесь $u(x)$ — функция синтеза, определенная на Ω. Если $x^1 = x(t_1)$, то для каждой точки $x(t)$, очевидно, $T(x(t)) = t_1 - t$. Поэтому

$$\frac{d}{dt}T(x(t)) \equiv -1. \tag{3.2.4}$$

Пусть теперь $v \in U$ — произвольное значение управляющего параметра. Если выпустить из точки x^0 решение $y(t)$ уравнения

$$\dot{x} = f(x,v) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon), \tag{3.2.5}$$

т. е. использовать на промежутке $[t_0, t_0+\varepsilon]$ управление $v(t) \equiv v$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ точка $y(t_0+\varepsilon)$ не выйдет из Ω (т. к. Ω открыто). Если $w(t)$ — оптимальное управление, переводящее $y(t_0+\varepsilon)$ в x^1, то суперпозиция $v \oplus w$ переводит x^0 в x^1, причем, очевидно, время этого перехода равно $\varepsilon + T(y(t_0+\varepsilon))$. Так как это время (ввиду произвола выбора $v \in U$), вообще говоря, не оптимально, то $\varepsilon + T(y(t_0+\varepsilon)) \geqslant T(y(t_0)) = T(x^0)$. Поэтому $\dfrac{1}{\varepsilon}[T(y(t_0+\varepsilon)) - T(y(t_0)] \geqslant -1$. Суперпозиция $T(y(t))$ дифференцируема. Значит,

$$\frac{d}{dt}T(y(t))\Big|_{t=t_0} \geqslant -1. \tag{3.2.6}$$

Раскрывая производные в (3.2.4) и (3.2.6), имеем

$$\langle T'(x(t_0)), \dot{x}(t_0)\rangle = -1, \quad \langle T'(y(t_0)), \dot{y}(t_0)\rangle \geqslant -1.$$

Но $x(t)$ и $y(t)$ — решения систем (3.2.3) и (3.2.5) с общим начальным условием x^0. Поэтому $\dot{x}(t_0) = f(x^0, u(x^0))$ и $\dot{y}(t_0) = f(x^0, v(x^0))$, откуда

$$\langle T'(x^0), f(x^0, u(x^0))\rangle = -1, \quad \langle T'(x^0), f(x^0, v(x^0))\rangle \geqslant -1. \tag{3.2.7}$$

Если положить $T(x) = -\Phi(x)$ на Ω, то в силу произвола $x^0 \in \Omega$ и $v \in U$ оба высказывания в (3.2.7) можно объединить:

$$\sup_{v\in U}\langle \Phi'(x), f(x,v)\rangle = \langle \Phi'(x), f(x,u(x))\rangle = 1. \tag{3.2.8}$$

В координатной записи:

$$\sup_{v\in U}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}f_i(x,v) = 1\left(=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}f_i(x,u(x))\right). \tag{3.2.9}$$

Уравнения (3.2.8), (3.2.9) носят название уравнения Беллмана. Из (3.2.9) видно, что относительно $\Phi(x)$ это уравнение в частных производных, правда с нестандартно определяемыми коэффициентами — через процедуру отыскания максимума по v. Напомним, что обоснование (3.2.8), (3.2.9) было проведено в предположении гладкости Φ на Ω.

Задача 3.2.1. *Показать, что Φ негладкая в задаче о мягкой стыковке.*

3.2.3. Уравнение Беллмана для общего случая

Для предыдущего объекта

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{3.2.10}$$

с достаточно гладкой f рассматривается критерий качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u)\,dt \tag{3.2.11}$$

для задачи перевода точек из $X \subset R^n$ в фиксированное конечное состояние $x^1 \in R^n$. Обозначим через $J(x)$ значение (3.2.11), соответствующее оптимальному переходу из x в x^1. Предположим, что функция $J(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве $\Omega \subset R^n$.

Пусть x^0 — некоторая точка из Ω и $x(t), u(t)$ — соответствующие оптимальные траектория и управление ($x(t_0) = x^0$), переводящие x^0 в x^1. Тогда при $t < t_1$

$$J(x(t_0)) - J(x(t)) = \int_{t_0}^{t} f_0(x,u)\,dt.$$

Если же из точки x^0 сдвинуться с произвольным значением $v \in U$ за достаточно малое время $\varepsilon > 0$, то на соответствующей траектории $y(t)$ будем иметь

$$J(x^0) = J(y(t_0)) \leqslant \int_{t_0}^{t} f_0(y(\tau), v) d\tau + J(y(t))\,(t_0 < t < t_0 + \varepsilon).$$

Отсюда, переходя к обозначению $\Phi(x) \equiv -J(x)$, получим аналогично случаю быстродействия: для любого $v \in U$

$$\begin{aligned}&\langle \Phi'(x), f(x,v)\rangle - f_0(x,v) \leqslant \\ &\leqslant \langle \Phi'(x), f(x,u(x))\rangle - f_0(x,u(x)) = 0,\end{aligned}$$

что допускает перезапись

$$\begin{aligned}&\sup_{v\in U} [\langle \Phi'(x), f(x,v)\rangle - f_0(x,v)] = \\ &= [\langle \Phi'(x), f(x,u(x))\rangle - f_0(x,u(x))] = 0\end{aligned}$$

и может быть переписано в покоординатной форме

$$\begin{aligned}&\sup_{v\in U} \left[\sum_{1}^{n} \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i} f_i(x,v) - f_0(x,v)\right] = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i} f_i(x,u(x)) - f_0(x,u(x))\right] = 0.\end{aligned}$$

3.2.4. Принцип максимума

Ограничимся задачей быстродействия. Пусть $\Phi(x)$ — введенная в 3.2.2 функция $\Phi(x) \equiv -T(x)$ для системы

$$\dot{x} = f(x,u) \quad (u \in U). \tag{3.2.12}$$

В предположении ее гладкости имеем

$$\sup_{v\in U} \langle \Phi'(x), f(x,v)\rangle = \langle \Phi'(x), f(x,u(x))\rangle = 1. \tag{3.2.13}$$

Положим

$$g(x,u) = \langle \Phi'(x), f(x,u)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i} f_i(x,u). \tag{3.2.14}$$

В силу (3.2.13) для оптимального управления $u(t)$ и соответствующей траектории

$$g(x,u) \leqslant 1 \quad (x \in \Omega,\ u \in U), \tag{3.2.15}$$

$$g(x(t), u(t)) = 1 \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{3.2.16}$$

Поэтому, т. к. в силу (3.2.15) $g(x, u(t)) \leqslant 1$ для любой точки $x \in \Omega$ и, в силу (3.2.16),

$$x(t) \to \max_{x\in\Omega} g(x, u(t)),$$

то в силу открытости Ω и при условии гладкости g

$$\frac{\partial}{\partial x_k} g(x(t), u(t)) = 0 \quad (k = \overline{1,n}),$$

что с учетом (3.2.14) означает

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(x(t))}{\partial x_k \partial x_i} f_i(x(t), u(t)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi(x(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x(t), u(t)) = 0 \quad (k = \overline{1,n}).\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Так как $f_i(x(t), u(t)) \equiv \dfrac{d}{dt} x_i(t)$ и $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \partial x_i} = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_k}$, то первая группа слагаемых в (3.2.17) допускает представление

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(x(t))}{\partial x_k \partial x_i} f_i(x(t)), u(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\Phi(x(t))}{\partial x_k}\right) \frac{d}{dt} x_i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\Phi(x(t))}{\partial x_k}\right).\end{aligned}$$

С учетом этого и полагая $\dfrac{\partial}{\partial x_k} \Phi(x(t)) = \psi_k(t)$, имеем из (3.2.17), что

$$\dot{\psi}_k(t) = -\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \frac{\partial f_i(x(t), u(t))}{\partial x_k} \quad (k = \overline{1,n}), \tag{3.2.18}$$

причем вследствие (3.2.13) и (3.2.14)

$$\sup_{v \in U} \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f_i(x(t), v) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f_i(x(t), u(t)) = 1 \tag{3.2.19}$$

или, короче (полагая $(\psi_1, \cdots, \psi_n) = \psi$),

$$\sup_{v \in U} \langle \psi(t), f(x(t), v) \rangle = \langle \psi(t), f(x(t), u(t)) \rangle = 1.$$

Таким образом, если функция $\Phi(x)$ дважды дифференцируема на Ω, то нами установлена

Теорема 3.2.3 (принцип максимума Понтрягина). *Если $u(t)$ и $x(t)$ — оптимальное управление и траектория, то существует нетривиальное решение системы* (3.2.18)*, на котором справедливо равенство максимума* (3.2.19).

3.2.5. Принцип максимума для общей задачи

Предлагается перенести предыдущие рассуждения.

3.3. Теория Гамкрелидзе

3.3.1. Постановка задачи в теории Гамкрелидзе (ТГ). Общность положения

В R^n рассматривается управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (u \in U \subset R^m) \tag{3.3.1}$$

с нулевым конечным состоянием. A и B — матрицы, U — многогранник. Критерий оптимальности — время процесса. Тем самым речь идет о быстродействии в нуль.

Согласно принципу максимума, если $u(t)$ — оптимальное управление, то существует нетривиальное решение $\psi(t)$ системы

$$\dot{\psi} = -A^* \psi, \tag{3.3.2}$$

на котором почти всюду

$$\sup_{v \in U} \langle \psi(t), Bv \rangle = \langle \psi(t), Bu(t) \rangle. \tag{3.3.3}$$

Так как U — многогранник, то его край $\mathrm{ex}\, U$ — конечное множество и, согласно (3.3.3), $u(t)$, являясь точкой максимума на U линейного по v функционала, должно принимать значения в $\mathrm{ex}\, U$. Ниже будет показано, что оптимальное управление наверняка кусочно-постоянное и, кроме того, что равенство максимума (3.3.3) не только необходимо, но и достаточно (вообще говоря) для оптимальности. Последние два свойства верны при дополнительном предположении общности положения, когда для любого вектора h, параллельного одному из ребер U, набор $Bh, ABh, \ldots, A^{n-1}Bh$ линейно независим. Для проверки этого условия достаточно составить из этих векторов матрицу и убедиться в том, что ее определитель отличен от нуля.

3.3.2. Условие общности положения

Пусть $h \in R^n$ и A – $(n \times n)$-матрица. Скажем, что h трансверсален A, если h не принадлежит ни одному собственному инвариантному подпространству A.

Теорема 3.3.1. *Для трансверсальности h и A необходимо и достаточно, чтобы набор $h, Ah, \ldots, A^{n-1}h$ был линейно независим.*

Доказательство.

Пусть $h \in E_0$ $(h \neq 0)$ и $AE_0 \subset E_0$, $\dim E_0 < n$. Тогда $A^i h \in E_0$ при всех i, т. е. набор из n векторов

$$h, Ah, \ldots, A^{n-1}h \tag{3.3.4}$$

лежит в пространстве E_0, причем $\dim E_0 \leqslant n-1$.

Наоборот, пусть набор (3.3.4) линейно зависим. Тогда для не всех нулевых α_i должно быть

$$\alpha_0 h + \alpha_1 Ah + \ldots + \alpha_{n-1} A^{n-1} h = 0.$$

Обозначая через α_{i_0} последний из ненулевых коэффициентов, имеем $i_0 \leqslant$ $\leqslant n-1$ и

$$\alpha_{i_0} A^{i_0} h = -\sum_{i < i_0} \alpha_i A^i h \quad (\alpha_{i_0} \neq 0). \tag{3.3.5}$$

Обозначим через E_0 линейную оболочку векторов $h, Ah, \ldots, A^{i_0-1}h$. Очевидно, $\dim E_0 \leqslant i_0 \leqslant n-1$. Для любого $x \in E_0$ имеем $x = \sum_{i=0}^{i_0-1} \beta_i A^i h$ при некоторых β_i. Но тогда $Ax = \beta_0 Ah + \beta_1 A^2 h + \ldots + \beta_{i_0-1} A^{i_0} h$, где первые $i_0 - 1$ слагаемых лежат в E_0, а последнее слагаемое $\beta_{i_0-1} A^{i_0} h$ принадлежит E_0 в силу (3.3.5). Значит, $Ax \in E_0$, т. е. E_0 инвариантно для A. Теорема доказана.

Скажем, что вектор h трансверсален системе

$$\dot{\psi} = A^*\psi, \tag{3.3.6}$$

если у (3.3.6) не существует ни одной нетривиальной траектории такой, что на некотором отрезке $[t_0, t_1]$

$$\langle h, \psi(t)\rangle = 0. \tag{3.3.7}$$

Теорема 3.3.2. *Для того чтобы h был трансверсален системе* (3.3.6)*, необходимо и достаточно, чтобы h был трансверсален матрице A.*

Доказательство.

Пусть h не трансверсален (3.3.6). Тогда для некоторого решения $\psi(t) \not\equiv 0$ системы (3.3.6) справедливо (3.3.7). Рассмотрим множество $E_0 = \{x : \langle x, \psi(t)\rangle = 0\ (t_0 \leqslant t \leqslant t_1)\}$. Очевидно, E_0 — подпространство E, причем $\dim E_0 < n$. Кроме того, $h \in E_0$, т. е. $\dim E_0 \geqslant 1$. Покажем, что $AE_0 \subset E_0$.

Пусть $x \in E_0$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \langle x, \psi(t)\rangle$. Так как $\varphi(t) \equiv 0$ (ведь $x \in E_0$), то $\varphi'(t) \equiv 0$, то есть $0 \equiv \langle x, \dot{\psi}(t)\rangle \equiv \langle x, A^*\psi(t)\rangle \equiv \langle Ax, \psi(t)\rangle$ на $[t_0, t_1]$. Но это значит, что $Ax \in E_0$. Значит, h не трансверсален A.

Пусть, наоборот, h не трансверсален A и E_0 — собственное инвариантное подпространство A, содержащее h. Пусть E^0 — ортогональное дополнение E_0. Оно, очевидно, инвариантно для A^* и для e^{A^*t} $(t > 0)$. Пусть z_0 — произвольный вектор $(\neq 0)$ из E^0. Но это значит при $\psi(t) = e^{A^*t}z_0$, что $\langle h, \psi(t)\rangle \equiv 0$, т. е. h не трансверсален системе (3.3.6). Теорема доказана.

Очевидно, h трансверсален матрице A одновременно с $(-A)$. Поэтому в теореме 3.3.2 систему (3.3.6) можно заменить на $\dot{\psi} = -A^*\psi$.

Определение 3.3.1. *Многогранник U находится в общем положении для управляемой системы $\dot{x} = Ax + Bu$, если для каждого вектора h, параллельного одному из ребер U, вектор Bh трансверсален матрице A.*

3.3.3. Теорема о числе переключений

Теорема 3.3.3. *Пусть многогранник U находится в общем положении для системы $\dot{x} = Ax + Bu$. Пусть для некоторого нетривиального решения $\psi(t)$ системы $\dot{\psi} = -A^*\psi$ справедливо равенство*

$$\sup_{v\in U}\langle \psi(t), Bv\rangle = \langle \psi(t), Bu(t)\rangle \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{3.3.8}$$

Тогда $u(t)$ кусочно-постоянна на $[t_0, t_1]$.

В силу принципа максимума эта теорема справедлива для оптимальных управлений.

Доказательство.

Равенство (3.3.8) означает, что $u(t)$ есть точка максимума на U линейного по v функционала $l(t) = \langle \psi(t), Bv\rangle$. Поэтому $u(t) \in \operatorname{ex} U$, т. е. совпадает с одной из крайних точек (вершин) U при каждом t. Обозначим через S множество значений $t \in [t_0, t_1]$, при которых равенство (3.3.8) определяет $u(t)$ не однозначно, т. е. у функционала $l(v) = \langle \psi(t), Bv\rangle$ точка максимума на U не единственна. Покажем, что S конечно. Для каждой $t \in S$ функционал $l_t(v) = \langle \psi(t), Bv\rangle$ есть константа по v на одной из граней U, в том числе на одном из ребер U. Если S не конечно, то для некоторой последовательности $\{s_k\} \subset S$ каждый функционал $l_{s_k}(v)$ есть константа по v на одном из ребер U. В силу конечного числа ребер, некоторая подпоследовательность $\tau_i = s_{k_i}$ обладает следующим свойством: $l_{\tau_i}(v) = \langle \psi(\tau_i), Bv\rangle$ при каждом i есть константа по v на каком-то одном из ребер. Если v_1 и v_2 — концы этого ребра, то на векторе $h = v_1 - v_2$ имеет место $\langle \psi(\tau_i), Bh\rangle = 0$.

Полагая $Bh = b$, рассмотрим функцию $\varphi(t) == \langle \psi(t), b\rangle = \sum b_i\psi_i(t)$. Так как каждая $\psi_i(t)$, как решение системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, есть аналитическая функция, то $\varphi(t)$ аналитична. В то же время $\psi(t)$ имеет бесконечное число нулей $\{\tau_i\}$. Поэтому $\varphi(t) \equiv 0$. Но это значит, что $\langle \psi(t), Bh\rangle \equiv 0$, т. е. вектор Bh не трансверсален A, что противоречит предположению. Таким образом, множество S конечно, т. е. $S = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$.

Покажем теперь, что на каждом из интервалов $\Delta_0 = = (t_0, \tau_0)$, $\Delta_1 = (\tau_0, \tau_1), \ldots, \Delta_{k+1} = (\tau_k, t_1)$ функция $u(t)$ есть константа. По доказанному выше на каждом из интервалов Δ_j функционал $l_t(v) = \langle \psi(t), Bv\rangle$ достигает максимума по v в единственной вершине U, не зависящей от $t \in \Delta_j$. Поэтому если $\operatorname{ex} U = \{v_i\}_1^N$, то $\sup\limits_{v\in U}\langle \psi(t), Bv\rangle = \sup\limits_{v\in \operatorname{ex} U}\langle \psi(t), Bv\rangle = \max\limits_i\langle \psi(t), Bv_i\rangle$ при $t \in \Delta_j$.

Введя в рассмотрение функции $\chi_j(t) = \langle \psi(t), Bv_j\rangle$, непрерывные на $[t_0, t_1]$, имеем тем самым, что на каждом $t \in \Delta_j$ максимум $\max\limits_j \chi_j(t)$ достигается при одном и том же, причем единственном, значении $j = j_i$. Поэтому вследствие непрерывности $\chi_j(t)$ это максимизирующее значение j_i не зависит на Δ_j от t_0. (Если бы для некоторых $\xi_1 < \xi_2$ из Δ_i максимум $\chi_j(\xi_1)$ и $\chi_j(\xi_2)$ по j достигался при разных значениях j, то для некоторой точки μ $(\xi_1 < \mu < \xi_2)$ и некоторых j_1, j_2 было бы $\chi_{j_1}(\mu) = \chi_{j_2}(\mu) \geqslant \chi_i(\mu)$ для всех i, что противоречило бы единственности точки максимума по i у $\chi_i(t)$ при каждом $t \in \Delta_j$). Но это значит, что $u(t) \equiv v_{ji}$ при $t \in \Delta_j$, т. е. $u(t)$ — кусочно-постоянна на $[t_0, t_1]$. Теорема доказана.

3.3.4. Обращение принципа максимума

Если $u(t)$ — оптимальное управление в задаче о быстродействии в нуль для объекта
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (u \in U), \tag{3.3.9}$$
то в силу принципа максимума существует решение $\psi(t) \not\equiv 0$ системы
$$\dot{\psi} = -A^*\Psi, \tag{3.3.10}$$
на котором почти при всех t
$$\sup_{v\in U}\langle\psi(t), Bv\rangle = \langle\psi(t), Bu(t)\rangle. \tag{3.3.11}$$
Ниже доказывается, что свойство (3.3.11) не только необходимо, но и в определенном смысле достаточно, если U — многогранник.

Теорема 3.3.4. *Пусть U находится в общем положении для* (3.3.9)*. Пусть нуль принадлежит U, не входя в $\operatorname{ex} U$, т.е. не совпадает ни с одной из вершин U. Пусть управление $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ переводит $x(t_0)$ в нуль и для некоторого нетривиального решения $\psi(t) \not\equiv 0$ системы* (3.3.10) *удовлетворяет* (3.3.11)*. Тогда $u(t)$ оптимально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.
1 этап. Нам потребуется

Лемма 3.3.1. *Если $\psi(t), x(t), u(t)$ связаны равенствами* (3.3.9) *и* (3.3.10) *на $[\tau_0, \tau_1]$, то*
$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t), x(t)\rangle \equiv \langle\psi(t), Bu(t)\rangle. \tag{3.3.12}$$

Доказательство проводится непосредственно проверкой.

Возвращаясь к доказательству теоремы, предположим противное: существует управление $v(t)$, переводящее $x(t_0)$ в нуль и более оптимальное, чем $u(t)$, т. е. заданное на более коротком промежутке $[t_0, \tau]$ при $\tau < t_1$. Пусть $y(t)$ — соответствующая $v(t)$ траектории. Имеем
$$x(t_0) = y(t_0), \quad x(t_1) = y(\tau) = 0. \tag{3.3.13}$$
Откуда следует
$$\begin{aligned}\langle\psi(\tau), x(\tau)\rangle &= [\langle\psi(\tau), x(\tau)\rangle - \langle\psi(t_0), x(t_0)\rangle] - \\ &- [\langle\psi(\tau), y(\tau)\rangle - \langle\psi(t_0), y(t_0)\rangle] =\end{aligned}$$

и, с учетом (3.3.12),
$$\begin{aligned}&= \int_{t_0}^{\tau}\langle\psi(t), Bu(t)\rangle dt - \int_{t_0}^{\tau}\langle\psi(t), Bv(t)\rangle\, dt = \\ &= \int_{t_0}^{\tau}[\langle\psi(t), Bu(t)\rangle - \langle\psi(t), Bv(t)\rangle]\, dt.\end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле неотрицательно в силу (3.3.11). Поэтому
$$\langle\psi(\tau), x(\tau)\rangle \geqslant 0. \tag{3.3.14}$$
В то же время
$$\begin{aligned}\langle\psi(\tau), x(\tau)\rangle &\overset{(3.3.13)}{=} \langle\psi(\tau), x(\tau)\rangle - \\ - \langle\psi(t_1), x(t_1)\rangle &\overset{(3.3.12)}{=} -\int_{\tau}^{t_1}\langle\Psi(t), Bu(t)\rangle\, dt.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Так как нуль принадлежит U, то в силу (3.3.11) $\langle\psi(t), Bu(t)\rangle \geqslant 0$ при всех t. Но тогда из (3.3.15) следует, что $\langle\psi(\tau), x(\tau)\rangle \leqslant 0$, что в сопоставлении с (3.3.14) означает
$$\langle\psi(\tau), x(\tau)\rangle = 0.$$

2 этап. Отсюда, вследствие (3.3.15) $\int_{\tau}^{t_1}\langle\psi(t), Bu(t)\rangle\, dt = 0$, причем подынтегральное выражение неотрицательно. Значит:
$$\langle\psi(t), Bu(t)\rangle \equiv 0 \quad (\tau \leqslant t \leqslant t_1).$$
Отсюда, вследствие (3.3.11) $\sup\limits_{v\in U}\langle\psi(t), Bv\rangle = 0$ при $t \in [\tau, t_1]$. Но это значит, что при каждом $t \in [\tau, t_1]$ максимум линейного по v функционала $l_t(v) = \langle\psi(t), Bv\rangle$ достигается при $v = 0$. А так как нуль не принадлежит $\operatorname{ex} U$, то он является внутренней (относительно) точкой одной из граней U. Но тогда $l_t(v) \equiv 0$ на этой грани, а также на каждом ее ребре. Если h — одно из таких ребер, то $l_t(h) = 0$ при всех $t \in [\tau, t_1]$. Но это значит, что $\langle\psi(t), Bh\rangle = 0$ при $t \in [\tau, t_1]$. Последнее (так как $\tau < t_1$) противоречит общности положения. Теорема доказана.

3.4. Общий принцип максимума

3.4.1. Формулировка принципа максимума

Для управляемой системы с достаточно гладкой правой частью

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (u \in U) \tag{3.4.1}$$

критерий качества в классе кусочно-непрерывных управлений $u(t)$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u)\, dt, \tag{3.4.2}$$

где $[t_0, t_1]$ — свой для каждого управления $u(t)$ промежуток. Начальное и конечное состояния x^0 и x^1 считаются заданными. Для удобства формулировки расширим систему (3.4.1) добавлением уравнения $\dot{x}_0 = f_0(x, u)$. Если положить $æ = (x_0, x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $F = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$, то расширенная система приобретает вид

$$\dot{æ} = F(æ, u). \tag{3.4.3}$$

Введем гамильтониан $H(\psi, æ, u) = \langle \psi, F(æ, u) \rangle$, т. е.

$$H(\psi, æ, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x, u), \tag{3.4.4}$$

и с помощью него систему

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = \overline{0, n}). \tag{3.4.5}$$

Следует заметить, что с помощью H система (3.4.3) представима в виде

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad (i = \overline{0, n}), \tag{3.4.6}$$

дополняя (3.4.5) до системы Гамильтона. Отметим, что (3.4.5) — система линейная и однородная относительно ψ_i:

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{k=0}^{n} \psi_k \frac{\partial}{\partial x_i} f_k(x(t), u(t)),$$

причем здесь подставлены функции $u(t)$ и $x(t)$, относительно которых система (3.4.5) называется соответствующей.

Теорема 3.4.1 (Понтрягин). *Пусть $u(t), x(t)$ — оптимальные управление и траектория, переводящие x^0 и x^1 $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Тогда существует нетривиальное решение $\psi(t)$ соответствующей системы (3.4.5), для которого*

а) почти при всех $t \in [t_0, t_1]$ $\sup\limits_{v \in U} H(\psi(t), æ(t), v) = H(\psi(t), æ(t), u(t)) = l$;

б) $\psi_0(t_1) \leqslant 0$.

Проводившееся ранее обоснование, опиравшееся на уравнение Беллмана, как отмечалось, строгим доказательством считать нельзя, так как оно основано на достаточной гладкости $\Phi(x)$, которая не всегда справедлива. Строгое доказательство было проведено Понтрягиным.

3.4.2. Принцип максимума для неавтономной задачи

Исходная система

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (u \in U) \tag{3.4.7}$$

с критерием качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)\, dt$$

в классе кусочно-непрерывных управлений расширяется добавлением двух уравнений:

$$\dot{x}_0 = f_0(t, x, u),$$
$$\dot{x}_{n+1} = 1 \quad (x_{n+1} = t).$$

Обозначения $æ = (x_0, x, x_{n+1}) = (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ и $F = (f_0, f, 1)$ позволяют записать расширенную систему в виде

$$\dot{æ} = F(æ, u)$$

и, после введения гамильтониана $H(\psi, æ, u) = \langle \psi, F(æ, u) \rangle$, соответствующую сопряженную систему

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = \overline{0, n+1}).$$

Если задача имеет фиксированное время $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то эта задача оказывается частным случаем предыдущей. Переформулировка принципа максимума тривиальна.

3.4.3. Связь с вариационным исчислением

Для простейшей задачи вариационного исчисления

$$J(x) = \int_a^b f(t, x, x')\, dt \to \min_{\substack{x(a)=A \\ x(b)=B}}$$

эквивалентная задача оптимального управления звучит так. Пусть $U = (-\infty, \infty)$. Если $x(t) \to \min J$, положим $x = x_1$ и

$$\dot{x}_1 = u \quad (U = (-\infty, \infty)). \tag{3.4.8}$$

Добавляя к (3.4.8) уравнения

$$\dot{x}_0 = f(x_2, x_1, u),$$

$$\dot{x_2} = 1$$

И записывая гамильтониан $H(\psi, x_0, x_1, x_2, u) = \psi_0 f(x_2, x_1, u) + \psi_1 u + \psi_2$, имеем сопряженную систему

$$\dot{\psi_0} = 0, \tag{3.4.9}$$

$$\dot{\psi_1} = -\psi_0 f_x(x_2, x_1, u), \tag{3.4.10}$$

$$\dot{\psi_2} = -\psi_0 f_t(x_2, x_1, u). \tag{3.4.11}$$

Из равенства максимума следует

$$u(t) \to \max_{v \in (-\infty,\infty)} [\psi_0 f(x_2, x_1, v) + \psi_1 v] \tag{3.4.12}$$

для некоторого решения $\psi(t) \not\equiv 0$ системы (3.4.9)–(3.4.11). Из уравнения (3.4.9) следует, что $\psi_0(t) = \text{const}$. Если бы $\psi_0(t) \equiv 0$, то из (3.4.10) и (3.4.11) следовало бы, что $\dot{\psi_1} \equiv 0$ и $\dot{\psi_2} \equiv 0$, т. е. $\psi_1 = \text{const}$ и $\psi_2 = \text{const}$, откуда $H = \psi_1 v + \psi_2$ и, в силу (3.4.12), $\psi_1(t) \equiv 0$, что лишает принцип максимума смысла. Поэтому $\psi_0(t) = \text{const} \neq 0$. А так как $\psi_0(t_1) \leqslant 0$, то $\psi_0 \equiv \gamma_0 < 0 \quad (\gamma_0 \in R)$.

Из (3.4.12) следует $\frac{\partial}{\partial v}[\gamma_0 f(x_2, x_1, v) + \psi_1]_{v=u(t)} = 0$, т. е.

$$\gamma_0 f_{x'}(x_2, x_1, u(t)) + \psi_1 = 0.$$

Сокращая здесь на γ_0, имеем $\frac{\psi_1}{\gamma_0} + f_{x'}(x_2, x_1, u(t)) = 0$. Поэтому $\frac{d}{dt}(\frac{\psi_1}{\gamma_0}) = -\frac{d}{dt} f_{x'}(x_2, x_1, u(t))$. Из (3.4.10) имеем $\dot{\psi_1}/\gamma_0 = -f_x(x_2, x_1, u(t))$. Поэтому $f_x(x_2, x_1, u(t)) - \frac{d}{dt} f_{x'}(x_2, x_1, u(t)) = 0$, что эквивалентно уравнению Эйлера, если учесть $x_2(t) = t$, $x_1(t) = x(t)$ и $u(t) = x'(t)$.

Из (3.4.12) следует $\frac{d^2}{dv^2}[\gamma_0 f(t, x(t), v) + \psi_1(t) v]_{v=u(t)} \leqslant 0$, т. е.

$$\gamma_0 f_{x'x'}(t, x(t), x'(t)) \leqslant 0$$

с учетом $\gamma_0 < 0$ приводит к условию Лежандра.

Дополнение I

Дидактический материал по вариационному исчислению

Занятие 1. Задача с закрепленными концами. Уравнение Эйлера. Простейшие первые интегралы

В пространстве $C^1[a,b]$ задан функционал

$$\Phi(x) = \int\limits_a^b F(t,x,x')\,dt$$

с дважды непрерывно дифференцируемой $F(t,x,y)$. Ставится задача исследования Φ на экстремум на множестве G, где $G = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = A,\ x(b) = B\}$. Множество G является линейным многообразием, то есть вместе с каждой парой элементов $x, y \in G$ содержит всю прямую $\{x + \lambda(y-x) : \lambda \in R\}$.

Теорема 1. *Если $x_0(\cdot)$ дает экстремум функционалу $\Phi(x)$ на G (или $x_0 \to \operatorname*{extr}_G \Phi$), то x_0 является решением уравнения Эйлера:*

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0,$$

где $F_x = \dfrac{\partial}{\partial x}F(t,x_0(t),x_0'(t))$, $F_{x'} = \dfrac{\partial}{\partial x'}F(t,x_0(t),x_0'(t))$.

Определение. *Решения уравнения Эйлера называются экстремалями. Экстремаль, удовлетворяющая краевым условиям, называется допустимой экстремалью.*

Пример 1. Найти допустимые экстремали функционала

$$\Phi(x) = \int\limits_{-1}^0 (12tx - x'^2)\,dt$$

при условиях $x(-1) = 1, x(0) = 0$.

Решение. Имеем $F(t,x,x') = 12tx - x'^2$; $F_x = 12t$; $F_{x'} = -2x'$.

Уравнение Эйлера принимает вид: $12t + 2x'' = 0$ Его общее решение: $x(t) = -t^3 + Ct + C_1$. Краевым условиям удовлетворяет только одно: $x_0(t) = -t^3$.

Пример 2. Найти допустимые экстремали функционала

$$\Phi(x) = \int\limits_a^b (x^2 + 2txx')\,dt$$

при условиях $x(a) = A, x(b) = B$.

Решение. В данном примере $F(t,x,x') = x^2 + 2txx'$; $F_x = 2x + 2tx'$; $F_{x'} = 2tx$. Уравнение Эйлера имеет вид:

$$2x + 2tx' - \frac{d}{dt}(2tx) = 0,$$

т. е. $2x + 2tx' - 2x - 2tx' = 0$, что означает $0 = 0$. Это значит, что любая функция из $C^1[a,b]$, удовлетворяющая краевым условиям, является допустимой экстремалью. Следует отметить, что под знаком интеграла у $\Phi(x)$ стоит полный дифференциал, то есть $\Phi(x) = \int\limits_a^b d(tx^2)$, вследствие чего интеграл, рассматриваемый как криволинейный вдоль графика $x(t)$, не зависит от пути интегрирования. Поэтому $\Phi(x) = \text{const}$ на G.

Пример 3. Найти допустимые экстремали функционала

$$\Phi(x) = \int\limits_0^1 t^2 x'^2\,dt$$

при условиях $x(0) = 0,\ x(1) = 1$.

Решение. Так как $F(t,x,x') = t^2x'^2$, то $F_x = 0$; $F_{x'} = 2t^2x'$.

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(2t^2x') = 0.$$

Его общее решение: $x(t) = -\dfrac{C}{2t} + C_1$.

Найдем константы C и C_1. Так как $x(t)$ не ограничена на $(0,1]$, то наверняка $C = 0$. Тогда $x(1) = C_1 = 1$, но $x(0) = C_1 = 0$. Поэтому экстремали, удовлетворяющей краевым условиям, не существует.

Уравнение Эйлера можно решать с помощью первых интегралов, если функция $F(t,x,x')$ не зависит от одной из своих переменных:

1) $F(t,x,x') \equiv F(x,x')$. В этом случае $F_t \equiv 0$, уравнение Эйлера можно заменить следующим:
$$F - x'F_{x'} = C.$$
2) $F(t,x,x') \equiv F(t,x')$. В этом случае $F_x \equiv 0$ и первый интеграл
$$F_{x'} \equiv C.$$
3) $F(t,x,x') \equiv F(t,x)$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_x(t,x) \equiv 0$, решение которого определяется как неявная функция, которая, вообще говоря, не удовлетворяет одновременно обоим краевым условиям.

Пример 1. Найти допустимые экстремали функционала
$$\Phi(x) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{x'}$$
при условиях $x(0) = 0,\ x(1) = 1$.

Решение.

1 способ. $F(t,x,x') = \dfrac{1}{x'}$. Так как $F_t \equiv 0$, то можно воспользоваться уравнением для первого интеграла, приведенным в случае 1):
$$\frac{1}{x'} - x'(-\frac{1}{x'^2}) = C,$$
$$x' = 2/C.$$
Его общее решение: $x(t) = \dfrac{2}{C}t + C_1$.

Краевым условиям удовлетворяет решение: $x_0(t) = t$

2 способ. Так как $F_x \equiv 0$, то можно воспользоваться уравнением, приведенным в случае 2):
$$-\frac{1}{x'^2} = C,$$
$$x' = C_1,\ C_1 = \sqrt{-1/C}\ (\text{ если } C < 0).$$
Его общее решение: $x(t) = C_1 t + C_2$.

Исходным краевым условиям удовлетворяет $x_0(t) = t$.

Занятие 2. Более общие задачи вариационного исчисления

1. Задача Пуассона. В пространстве $C^{(n)}[a,b]$ задан функционал
$$\Phi(x) = \int\limits_a^b F(t,x,x',x'',\ldots,x^{(n)})\,dt$$
с непрерывно дифференцируемой по всем переменным функцией F, для которого ставится задача $\Phi \to \operatorname{extr}_G$, где $G = \{x \in C^{(n)}[a,b] : x^{(i)}(a) = A_i,\ x^{(i)}(b) = B_i;\ i = \overline{0,n-1}\}$.

Теорема 2. *Если $x_0 \to \operatorname{extr}_G \Phi$, то x_0 является решением уравнения Эйлера–Пуассона:*
$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} + \frac{d^2}{dt^2}F_{x''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}F_{x^{(n)}} = 0,$$
где $F_{x^{(i)}} = \dfrac{\partial}{\partial x^{(i)}} F(t,x_0(t),x_0'(t),x_0''(t),\ldots,x_0^{(n)}(t)),\ i = \overline{0,n}.$

Пример 1. При условиях $x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x(1) = 0,\ x'(1) = 2,5$ найти допустимые экстремали функционала
$$\Phi(x) = \int\limits_0^1 (720t^2x - x''^2)\,dt.$$

Решение. В данном случае $F(t,x,x',x'') = 360t^2x - x''^2$, откуда $F_x = 720t^2;\ F_{x'} = 0;\ F_{x''} = -2x''$.

Уравнение Эйлера–Пуассона имеет вид:
$$720t^2 - 2x^{(IV)} = 0.$$
Его общее решение: $x(t) = t^6 + C_1t^3 + C_2t^2 + C_3t + C_4$.

Исходным краевым условиям удовлетворяет только одно:
$$x_0(t) = t^6 - \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t.$$

Функционалы, зависящие от вектор-функции

На множестве $G = \{x \in C^1[a,b], y \in C^1[a,b] : x(a) = A_1, y(a) = B_1, x(b) = A_2, y(b) = B_2\}$ задан функционал

$$\Phi(x,y) = \int_a^b F(t,x,y,x',y')\,dt,$$

где F — непрерывно дифференцируемая по всем аргументам функция.

Ставится задача исследования функционала Φ на экстремум.

Теорема (необходимое условие экстремума). *Если* $(x_0,y_0) \to \operatorname{extr}_G \Phi$, *то* (x_0,y_0) *удовлетворяет системе уравнений Эйлера:*

$$\begin{cases} F_x - \dfrac{d}{dt}F_{x'} &= 0, \\ F_y - \dfrac{d}{dt}F_{y'} &= 0, \end{cases}$$

где

$$F_{x^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} F(t, x_0(t), y_0(t), x_0'(t), y_0'(t)),$$

$$F_{y^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} F(t, x_0(t), y_0(t), x_0'(t), y_0'(t)) \qquad (i = 0, 1).$$

Как и раньше, решения системы уравнений Эйлера, удовлетворяющие краевым условиям, назовем допустимыми экстремалями.

Пример 1. При условиях $x(1) = 1,\ x(2) = 2,\ y(1) = 0,\ y(2) = 1$ найти допустимые экстремали функционала

$$\Phi(x,y) = \int_1^2 (x'^2 + y^2 + y'^2)\,dt.$$

Решение. $F(t,x,y,x',y') = x'^2 + y^2 + y'^2$; $F_x = 0$; $F_{x'} = 2x'$; $F_y = 2y$; $F_{y'} = 2y'$.

Система уравнений Эйлера имеет вид:

$$\begin{cases} x'' = 0, \\ y - y'' = 0. \end{cases}$$

Его общее решение:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = C_3 e^t + C_4 e^{-t}. \end{cases}$$

Исходным краевым условиям удовлетворяет только одно:

$$\begin{cases} x_0(t) = t, \\ y_0(t) = \dfrac{1}{1-e^2}[e^{2-t} - e^t]. \end{cases}$$

Занятие 3. Задача Лагранжа (условный экстремум)

Пусть в пространстве $C^1[a,b]$ заданы функционалы

$$\Phi(x) = \int_a^b F(t,x,x')\,dt,$$

$$\psi_i(x) = \int_a^b K_i(t,x,x')\,dt,\ i = \overline{1,m}.$$

Ставится задача исследования функционала $\Phi(x)$ на экстремум на множестве

$$G = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = A;\ x(b) = B;$$
$$\psi_i(x) = \alpha_i,\ \alpha_i = \text{const},\ i = \overline{1,m}\}.$$

Схема решения задач (метод множителей Лагранжа):

1) Составляем функцию Лагранжа:

$$L(t,x,x') = \lambda_0 F(t,x,x') + \sum_{i=1}^m \lambda_i K_i(t,x,x').$$

2) Выписываем уравнение Эйлера:

$$L_x - \frac{d_0}{dt}L_{x'} = 0;$$

отдельно рассмотрим случаи $1)\lambda_0 = 0,\ 2)\lambda_0 \neq 0; (= 1)$.

3) Находим допустимые экстремали. Константы и значения λ_i определяем из условий:

$$x(a) = A,\ x(b) = B,$$
$$\psi_i(x) = \alpha_i,\ i = \overline{1,m}.$$

4) По определению минимума (максимума) функционала исследуем знак $\Phi(x) - \Phi(x_0)$, где x_0 — допустимая экстремаль. Если $\Phi(x) - \Phi(x_0) \geqslant 0$, то $x_0 \to \min_G \Phi$; если $\Phi(x) - \Phi(x_0) \leqslant 0$, то $x_0 \to \max_G \Phi$.

Пример. При условиях $x(0)=0,\ x(1)=1,\ \psi_1(x)=\int\limits_0^1 x\,dt=0$ исследовать $\Phi(x)=\int\limits_0^1 x'^2\,dt$.

Решение. $F(t,x,x')=x'^2;\ K_1(t,x,x')=x$.

1) Выписываем функцию Лагранжа:

$$L(t,x,x')=x'^2+\lambda x.$$

2) Уравнение имеет вид:

$$\lambda-2x''=0.$$

Его общее решение: $x(t)=\frac{\lambda}{4}t^2+C_1t+C_2$.

3) Находим допустимые экстремали.

Из условия $x(0)=0$ следует $C_2=0$. Из $x(1)=1$ находим $C_1=1-\frac{\lambda}{4}$. Наконец,

$$\int\limits_0^1 x\,dt=0 \ \text{ или } \ 0=\int\limits_0^1\left[\frac{\lambda}{4}t^2+\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)t\right]\,dt=\frac{12-\lambda}{24},$$

откуда $\lambda=12$. Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид: $x_0(t)=3t^2-2t$.

4) Пусть x_0 — допустимая экстремаль; x — экстремаль. Обозначим $x-x_0=h;\ x=h+x_0;\ x'=h'+x_0';\ \int\limits_0^1 h\,dt=\int\limits_0^1 x_0\,dt=0$ (в силу условия $\int\limits_0^1 x\,dt=0$).

Рассмотрим разность

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\int\limits_0^1 x'^2\,dt-\int\limits_0^1 {x_0'}^2\,dt=\int\limits_0^1(h'+x_0')^2\,dt-\int\limits_0^1 {x_0'}^2\,dt$$
$$=\int\limits_0^1[h'^2+2h'{x_0'}^2+{x_0'}^2-{x_0'}^2]\,dt=\int\limits_0^1[h'^2+2h'x_0']\,dt=$$
$$=\int\limits_0^1 h'^2\,dt+2\int\limits_0^1 h'x_0'\,dt\geqslant 2\int\limits_0^1 h'x_0'\,dt.$$

Интегрируя по частям находим

$$\int\limits_0^1 h'x_0'\,dt=[x_0'h]_0^1-6\int\limits_0^1 h\,dt=0,$$

так как x_0 и x принадлежат множеству $G=\{x\in C^1[0,1]:x(0)=0,\ x(1)=1,\ \int\limits_0^1 x\,dt=0\}$. Таким образом, $\Phi(x)-\Phi(x_0)\geqslant 2\int\limits_0^1 h'x_0'\,dt=0$, следовательно, $x_0(t)=3t^2-2t\to\min\limits_G\Phi$.

Занятие 4. Необходимое условие экстремума (условие Лежандра). Достаточные условия слабого экстремума

I. Условие Лежандра

На множестве $G=\{x\in C^1[a,b]:x(a)=A,\ x(b)=B\}$ задан функционал

$$\Phi(x)=\int\limits_a^b F(t,x,x')\,dt. \qquad (1)$$

Теорема 4. *Пусть* $x_0\to\max\Phi$. *Тогда*

$$F_{x'x'}(t,x_0(t),x_0'(t))\leqslant 0.$$

Если же $x_0\to\min\limits_G\Phi$, *то* $F_{x'x'}(t,x_0(t),x_0'(t))\geqslant 0$.

Схема решения задач:

1) Находим допустимые экстремали, то есть решения уравнения Эйлера, удовлетворяющие исходным краевым условиям.

2) Вычисляем $F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) = F_{x'x'}$.

3) Проверяем условие Лежандра: если $F_{x'x'} \geqslant 0$, то в точке x_0 функционал $\Phi(x)$ может иметь лишь минимум, если $F_{x'x'} \leqslant 0$, то только максимум.

Пример 1. При условиях $x(0) = x(1) = 0$ найти допустимые экстремали функционала

$$\Phi(x) = \int_0^1 (x - x'^2)\,dt,$$

выяснить характер возможного экстремума.

Решение. $F(t, x, x') = x - x'^2$; $F_x = 1$; $F_{x'} = -2x'$.

1) Находим допустимые экстремали. Уравнение Эйлера имеет вид

$$1 + 2x'' = 0.$$

Экстремаль, удовлетворяющая краевым условиям, $x_0(t) = \frac{t}{4}(1 - t)$.

2) $F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) = -2 \leqslant 0$, поэтому в точке $x_0(t)$ исходный функционал может иметь лишь максимум.

II. Достаточное условие слабого экстремума

Определение. *Говорят, что $x_0(t)$ доставляет слабый минимум функционалу $\Phi(x)$, если $\Phi(x) \geqslant \Phi(x_0)$ для всех x, достаточно близких к x_0 по метрике пространства $C^1[a,b]$.*

Введем обозначения

$$P(t) = F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)),$$
$$Q(t) = F_{xx}(t, x_0(t), x_0'(t)) - \frac{d}{dt}F_{xx'}(t, x_0(t), x_0'(t)),$$

где $x_0(t)$ — допустимая экстремаль функционала (1).

Уравнение $(Pu')' - Qu = 0$ называется уравнением Якоби.

Определение. *Говорят, что $x_0(t)$ удовлетворяет условию Якоби, если:*

1) *непрерывно дифференцируемая функция $P(t)$ не обращается в нуль на $[a,b]$;*

2) *уравнение Якоби имеет хотя бы одно решение без нулей на $[a,b]$.*

Теорема 5. *Следующие три условия эквивалентны:*

а) *любое нетривиальное решение уравнения Якоби $u(t)$ имеет на $[a,b]$ не более одного нуля (неосцилляция на $[a,b]$);*

б) *любое решение уравнения Якоби $u(t)$ с начальными условиями $u(a) = 0$, $u'(a) = 1$ не обращается в нуль на $(a,b]$ (отсутствие на $(a,b]$ точек, сопряженных к a);*

в) *существует решение уравнения Якоби без нулей на $[a,b]$ (условие Якоби).*

Теорема 6. *Пусть*

1) *x_0 — экстремаль, удовлетворяющая краевым условиям.*

2) *На экстремали справедливо неравенство $F_{x'x'} > 0$ ($F_{x'x'} < 0$) (усиленное условие Лежандра).*

3) *На x_0 выполнено условие Якоби.*

Тогда в точке x_0 функционал Φ имеет слабый минимум (максимум).

Схема решения задач:

1) Находим допустимые экстремали: $x_0(t)$.

2) Вычисляем

$$P(t) = F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)),$$
$$Q(t) = F_{xx}(t, x_0(t), x_0'(t)) - \frac{d}{dt}F_{xx'}(t, x_0(t), x_0'(t)).$$

3) Проверяем (усиленное) условие Лежандра $P(t) > 0$ ($P(t) < 0$).

4) Проверяем условие Якоби (пользуясь теоремой 6).

Пример 1. При условиях $x(-1) = -2, \quad x(1) = 0$ исследовать на экстремум функционал

$$\Phi(x) = \int_{-1}^{1} (12tx + x'^2)\, dt.$$

Решение. Имеем $F(t, x, x') = 12tx + x'^2;\ F_x = 12t;\ F_{x'} = 2x'$.

1) Находим допустимые экстремали, для этого решаем уравнение Эйлера:

$$12t - 2x'' = 0.$$

Его общее решение имеет вид: $x(t) = t^3 + C_1 t + C_2$. Исходным краевым условиям удовлетворяет только одно: $x_0(t) = t^3 - 1$.

2) Вычисляем $P(t),\ Q(t)$:

$$P(t) = F_{x'x'}|_{x=x_0} = 2;\ Q(t) = F_{xx} - \frac{d}{dt}F_{xx'}|_{x=x_0} = 0.$$

3) Проверка условия Лежандра: $P(t) = 2 > 0$, поэтому в точке x_0 функционал $\Phi(x)$ может иметь только минимум.

4) Проверка условия Якоби.

Уравнение Якоби имеет вид $2u'' = 0$. Его общее решение $u(t) = Ct + C_1$, поэтому, например, при $C = 0,\ C_1 = 1\ u(t) \equiv 1$, то есть существует решение без нулей на $[-1, 1]$.

Вывод: $x_0(t) = t^3 - 1 \to$ слаб. $\min\limits_G \Phi$, где $G = \{x \in C^1[-1; 1] : x(-1) = -2, x(1) = 0\}$.

Пример 2. При условиях $x(0) = x(a) = 0$ исследовать на экстремум функционал

$$\Phi(x) = \int_{0}^{a} (x'^2 - x^2)\, dt.$$

Решение. Имеем $F(t, x, x') = x'^2 - x^2;\ F_x = -2x;\ F_{x'} = 2x'$.

1) Находим допустимые экстремали, для этого решаем уравнение Эйлера:

$$-2x - 2x'' = 0.$$

Его общее решение имеет вид $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$.

Используя краевые условия, найдем постоянные $C_1, C_2 : x(0) = C_2 = 0,\ x(a) = C_1 \sin a = 0$. Тогда либо $C_1 = 0,\ \sin a = 0\ (\pi n, n \in Z)$ и C_1 - произвольно.

Поэтому $x_{01} \equiv 0\ (a \neq \pi n,\ n \in Z), x_{02}(t) = C_1 \sin t\ (a = \pi n, n \in Z)$ — две различные экстремали при различных значениях a.

2) Вычисляем $P(t), Q(t)$:

$$P(t) = 2;\ Q(t) = -2.$$

3) Условие Лежандра: $P(t) = 2 > 0$. Поэтому в точках x_{01}, x_{02} функционал $\Phi(x)$ может иметь лишь минимум.

4) Проверка условия Якоби.

Воспользуемся пунктом (б) из теоремы 1: любое решение уравнения Якоби $u(t)$ с начальными условиями $u(0) = 0, u'(0) = 1$ не обращается в нуль на $(0, a]$.

Уравнение Якоби имеет вид :$u'' + u = 0$. Его общее решение $u(t) = A \sin(t + B)$.

Выпишем решение, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0,\ u'(0) = 1$. Так как решение должно «выходить» из нуля, то оно имеет вид $u(t) = A \sin t$. Если $a < \pi$, то условие Якоби выполнено, так как на $(0, a]$ функция $u(t) = A \sin t$ не имеет нулей, так как $t = \pi$ есть нуль решения $u(t)$. Так как для экстремали $x_{02}(t) = C_1 \sin t \quad (a = \pi n)$ условие Якоби не выполнено, то на основании теоремы 6 сказать, доставляет ли x_{02} экстремум функционалу или нет, нельзя, другими словами, требуется дополнительное исследование, например, выяснение знака разности $\Phi(x) - \Phi(x_0)$, на этом мы здесь не останавливаемся, предоставляя это читателю. Для экстремали $x_{01}(t) \equiv 0$ условие Якоби выполнено, если $a < \pi$.

Вывод: $x_{01}(t) \equiv 0 \to$ слаб. $\min\limits_G \Phi$, где $G = \{x \in C^1[0, a] : x(0) = x(a) = 0,\ a < \pi\}$.

Занятие 5. Поле экстремалей

Определение 1. *Пусть $x_0(t)$ — экстремаль. Однопараметрическое семейство функций $x(t, C)$ (C — скаляр) называется полем экстремалей, включающим $x_0(t)$, если*

а) функция $x(t, C)$ определена по C, непрерывна по C в некоторой окрестности точки C_0;

б) при каждом фиксированном C функция $x(t,C)$ является по t экстремалью; и $x(t,C_0)=x_0(t)$;

в) при каждом t функция $x(t,C)$ строго монотонна по C.

Определение 2. *Скажем, что экстремаль $x_0(t)$ допускает включение в поле экстремалей, если существует поле экстремалей $x(t,C)$, включающее $x_0(t)$ и, кроме того, существует множество*

$$\Gamma_\varepsilon(x_0)=\{(t,x)\}:x_0(t)-\varepsilon<x<x_0(t)+\varepsilon,\ a\leqslant t\leqslant b\},$$

которое покрывается полем $x(t,C)$, то есть через каждую точку $(t,x)\in\in\Gamma_\varepsilon(x_0)$ проходит одна из экстремалей поля.

Теорема 7. *Для того чтобы данную экстремаль можно было включить в поле экстремалей, необходимо и достаточно, чтобы на этой экстремали выполнялось условие Якоби.*

Схема решения задач:

1) Для любого C $x(t,C)$ — экстремаль, то есть при каждом C функция $x(t,C)$ удовлетворяет уравнению Эйлера.

2) Существует $C=C_0$ такое, что $x(t,C_0)=x_0(t)$, то есть допустимая экстремаль входит в поле экстремалей.

3) Функция $x(t,C)$ непрерывно дифференцируема по C.

4) $\dfrac{\partial x(t,C)}{\partial C}|_{C=C_0}\neq 0$ для любого t, другими словами, экстремали не пересекаются.

Пример. Проверить допустимость включения $x_0(t)$ в поле экстремалей для задачи:

$$\Phi(x)=\int\limits_{-1}^{1}(12tx+x'^2)\,dt,\ x(-1)=-2,\ x(1)=0.$$

Решение. В нашем случае $F(t,x,x')=12tx+x'^2, F_x=12t;\ F_{2x'}==2x'$.

1) Решая уравнение Эйлера, находим $x(t)=t^3+Ct+C_1;\ x_0(t)=t^3-1$.

2) Строим поле экстремалей $x(t,C)$.

I способ. Рассмотрим следующее семейство функций: $x(t,C)=t^3++Ct$. Проверим, является ли $x(t,C)$ полем экстремалей.

1. Для любого $C:t^3+Ct=x(t,C)$ — экстремаль, так как удовлетворяет уравнению Эйлера.
2. Но не существует такого C_0, что $t^3+C_0t=t^3-1$.

Следовательно, $x(t,C)=t^3+Ct$ полем экстремалей, включающим $x_0(t)$, не является.

II способ. Возьмем другое семейство функций $x(t,C)=t^3+C$ и проверим, является ли оно полем экстремалей, включающим $x_0(t)$.

1. Для любого C $x(t,C)=t^3+C$ — экстремаль, так как удовлетворяет уравнению Эйлера.
2. Существует $C_0=-1$ такое, что $x(t,-1)=t^3-1=x_0(t)$.

3) $x(t,C)=t^3+C$ — непрерывно дифференцируемая по C функция.

4) $\dfrac{\partial x(t,C)}{\partial C}|_{c_0=-1}\neq 0$ для любого $t\in[-1,1]$.

Вывод: допустимая экстремаль $x_0(t)=t^3-1$ включена в поле экстремалей $x(t,C)=t^3+C$.

Занятие 6. Достаточное условие сильного экстремума

Рассмотрим задачу с закрепленными концами:

$$\Phi(x)=\int\limits_a^b F(t,x,x')\,dt\to\underset{G}{\text{extr}},$$

где $G=\{x\in C^1[a,b]:x(a)=A,\ x(b)=B\}$.

Определение. $x_0\to\min\limits_G\Phi$, *если $\Phi(x)\geqslant\Phi(x_0)$ для всех x, близких к x, в смысле метрики $C[a,b]$.*

Упрощенная теорема Вейерштрасса: *Пусть*

1) *$x_0(t)$ — допустимая экстремаль;*

2) *$x_0(t)$ удовлетворяет условию Якоби;*

3) *$F_{x'x'}(t,x,q)$ — непрерывна;*

4) *$F_{x'x'}(t,x,q)\geqslant 0$ $(F_{x'x'}(t,x,q)\leqslant 0)$ для всех точек (t,x), близких к графику функции $x_0(t)$, и для любого q.*

Тогда $x_0\to\min\limits_G\Phi$ $(x_0\to\max\limits_G\Phi)$.

Схема решения задач:

1) Находим допустимые экстремали $x_0(t)$, для этого находим решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее краевым условиям.

2) Проверяем выполнение условия Якоби, для этого составляем уравнение Якоби $(Pu')' - Qu = 0$,

$$P(t) = F_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)),$$
$$Q(t) = F_{xx}(t, x_0(t), x_0'(t)) - \frac{d}{dt}F_{xx'}(t, x_0, x_0'(t)).$$

3) Проверяем условие непрерывности функции $F_{x'x'}(t, x, q)$.

4) Выясняем, выполняется ли достаточное условие сильного экстремума

$$F_{x'x'}(t, x, q) \geqslant 0 \quad (F_{x'x'}(t, x, q) \leqslant 0)$$

для любого q и для любых точек (t, x), близких к графику функции $x_0(t)$.

Делаем вывод: $x_0 \to \min\limits_G \quad (x_0 \to \max \Phi)$.

Пример 1. При условиях $x(0) = x(b) = 0$ исследовать

$$\Phi(x) = \int\limits_0^b (t^3 - x'^2 + x^2)\, dt$$

на сильный экстремум.

Решение.

$$F(t, x, x') = t^3 - x'^2 + x^2;\ F_x = 2x;\ F_{x'} = -2x'.$$

1) Находим допустимые экстремали.

Уравнение Эйлера имеет вид: $x + x'' = 0$. Его общее решение $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. С помощью краевых условий находим C_1, C_2 : $x(0) = C_1 = 0; x(b) = C_2 \sin b = 0$. Поэтому либо $\sin b = 0$ $(b = \pi n, n \in Z)$ и допустимая экстремаль имеет вид $x_{01}(t) = C_2 \sin t$, C_2 — произвольно; либо $C_2 = 0 \quad (\sin b \neq 0, b \neq \pi n, n \in Z)$, и тогда $x_{02}(t) \equiv 0$.

2) Проверка выполнения условия Якоби.

$$P(t) = F_{x'x'} = -2; \quad Q(t) = F_{xx} - \frac{d}{dt}F_{xx'} = 2.$$

Составляем уравнение Якоби $u'' + u = 0$; его общее решение $u = A\sin(t + B)$. Выполнение условия Якоби эквивалентно отсутствию у решений уравнения Якоби на $(0, b]$ точек, сопряженных к 0.

Возьмем решение, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, то есть $B = 0$, $u(t) = A\sin t$. Для отсутствия на $(0, b]$ точек, сопряженных к 0, необходимо, чтобы $b < \pi$. Таким образом, условие Якоби выполнено лишь для допустимой экстремали $x_{02}(t) \equiv 0$. Допустимая экстремаль $x_{01}(t) = C_2 \sin t$ условию Якоби не удовлетворяет.

3) Поскольку $F_{x'x'}(t, x, q) \equiv -2$, то она непрерывна.

4) Достаточное условие сильного экстремума: $F_{x'x'}(t, x, q) = -2 < 0$ для любого q и для любых точек (t, x).

Вывод: $x_0(t) \equiv 0 \to \max\limits_G \Phi$, где $G = \{x \in C^1[0, b] : x(0) = x(b) = 0, b < \pi\}$.

Задачи для самостоятельного решения

1) (*К первому занятию*). Найти допустимые экстремали для заданных функционалов при указанных условиях:

а) $\Phi(x) = \int\limits_1^2 (x'^2 + 2xx' + x^2)\, dt;\ x(1) = 1;\ x(2) = 0;$

б) $\Phi(x) = \int\limits_a^b (2tx + (t^2 + e^x)x')\, dt;\ x(a) = A;\ x(b) = B;$

в) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (x'^2 + tx)\, dt;\ x(0) = x(1) = 0;$

г) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (t^2x - x'^2)\, dt;\ x(0) = x(1) = 0;$

д) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 e^x x'^2\,dt;\ x(0)=0;\ x(1)=\ln 4;$

е) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 (x'^2+xx'+12tx);\ x(0)=x(1)=0;$

ж) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 e^x x'^2\,dt;\ x(0)=0;\ x(1)=\ln 4;$

з) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 (12tx'+x'^2)\,dt;\ x(0)=3;\ x(1)=0;$

и) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 (x-x'^2)\,dt;\ x(0)=0;\ x(1)=-1;$

к) $\Phi(x)=\int\limits_0^{3/2} (x'^3+2x)\,dt;\ x(0)=0;\ x(3/2)=1;$

л) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 x^2x'^2\,dt;\ x(0)=1;\ x(1)=\sqrt{2};$

м) $J[x]=\int\limits_0^2 \left(xx'^3-3xx'^2\right)\,dt,\ x(0)=4,\ x(2)=6;$

н) $J[x]=\int\limits_a^b x^3\,dt,\ x(a)=x_1,\ x(b)=x_2;$

о) $\int\limits_a^b (x^2+xx')\,dt,\ x(a)=x_1,\ x(b)=x_2;$

п) $\int\limits_a^b (x'-x'^3)\,dt,\ x(a)=x_1,\ x(b)=x_2;$

р) $J[x]=\int\limits_a^b (x'^2+2xx')dx,\ x(a)=x_1,\ x(b)=x_2;$

с) $J[x]=\int\limits_a^b (xx'+x'^2)dx,\ x(a)=x_1,\ x(b)=x_2;$

т) $\Phi(x)=\int\limits_0^{\pi/2} ((x')^2-x^2)\,dt,\ x(0)=0,\ x(\pi/2)=1;$

у) $\Phi(x)=\int\limits_\pi^{2\pi} (4(x')^2-7xx'-x^2)\,dt,\ x(\pi)=0,\ x(2\pi)=0;$

ф) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 (x')^2e^{\cos x'}\,dt,\ x(0)=0,\ x(1)=-4;$

х) $\Phi(x)=\int\limits_0^{\pi/8} (16x^2+(x')^2+2x(\sin 2t+16t))\,dt,\ x(0)=0, x(\pi/8)=$
$=-\pi/8;$

ц) $\Phi(x)=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (3t^2x^2+\cos x+x'(2t^3x-t\sin x)\,dt$
$x(\pi/4)=0,\ x(\pi/2)=1;$

ч) $\Phi(x)=\int\limits_2^4 (t(x')^4+2x(x')^3)\,dt,\ x(2)=1,\ x(4)=5;$

ш) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 ((x')^2-t^6x'-2tx)\,dt,\ x(0)=0,\ x(1)=-\frac{1}{6};$

щ) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 tgx'\,dt,\ x(0)=0,\ x(1)=2;$

э) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 ((x')^2+\frac{2tx}{1+t^2})\,dt,\ x(0)=0,\ x(1)=-2.$

2) (*Ко второму занятию*). Найти допустимые экстремали функционалов при заданных условиях.

а) $\Phi(x) = \int\limits_a^b (x'^2 + xx'')\, dt;\ x(a) = A_0;\ x'(a) = A_1;$
$x(b) = B_0;\ x'(b) = B_1;$

б) $\Phi(x) = \int\limits_a^b (x + x'')\, dt;\ x(a) = A_0;\ x'(a) = A_1;$
$x(b) = B_0;\ x'(b) = B_1;$

в) $\Phi(x) = \int\limits_0^4 (x^2 + 2x'^2 + x''^2)\, dt;\ x(0) = x'(0) = 0;\ x(4) = x'(4) =$
$= e^{-1};$

г) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 [-(x'')^2 + 48x]\, dt;\ x(0) = x'(0) = 0;$
$x(1) = 1;\ x'(1) = 4;$

д) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (x''')^2\, dt;\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0;$
$x(1) = 1;\ x'(1) = 3;\ x''(1) = B;$

е) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (120tx - x'')\, dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,$
$x'(0) = 0,\ x'(1) = 6;$

ж) $\Phi(x) = \int\limits_0^{\pi/1} ((x'')^2 - x^2 + t^2)\, dt,\ x(0) = 1,\ x(\pi/2) = 0,\ x'(0) =$
$= 0,\ x'(\pi/2) = -1;$

з) $\Phi(x) = \int\limits_0^b ((x'')^2 + x'^2)\, dt,\ x(0) = 0,\ x(b) = 1,$
$x'(0) = 0,\ x'(b) = 0;$

и) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 ((x'')^2 + x^2 - 2xt^2)\, dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x'(0) =$
$= 0,\ x'(1) = 1;$

к) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 ((x''')^2 - x''^2)\, dt,\ x(0) = x''(0) = 0,$
$x(1) = x''(1) = \operatorname{sh} 1,\ x'(0) = 1,\ x'(1) = \operatorname{ch} 1;$

л) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (x''')^2\, dt,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,$
$x(1) = 1,\ x'(1) = 4,\ x''(1) = 12;$

м) $\Phi(x) = \int\limits_0^\pi ((x''')^2) - (x')^2)\, dt,\ x(0) = x'(0) =$
$= x''(0) = 0,\ x(\pi) = x''(\pi) = \operatorname{sh}\ \pi,$
$x'(\pi) = \operatorname{ch}\ \pi + 1.$

3) (*Ко второму занятию*). Найти допустимые экстремали функционалов, зависящих от вектор-функций, при заданных условиях.

а) $\Phi(x, y) = \int\limits_a^b (2xyx't + x^2y')\, dt;\ x(a) = A_1;\ y(a) = A_2;\ x(b) = B_1;$
$y(b) = B_2;$

б) $\Phi(x, y) = \int\limits_0^\pi (2xy - 2x^2 + x'^2 - y'^2)\, dt;\ x(0) = y(0) = 0;\ x(\pi) =$
$= y(\pi) = 1;$

в) $I[x_1, x_2] = \int\limits_0^{\pi/2} (x_1'x_2' - x_1x_2)\, dt,\ x_1(0) = 0,$
$x_1(\pi/2) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_2(\pi/2) = -1;$

г) $I[x_1, x_2] = \int\limits_1^3 (t(x_1')^2(x_2')^2 + tx_1x_2)\, dt,\ x_1(1) = 1,\ x_1(3) = ln3 +$
$+ 1,\ x_2(1) = 0,\ x_2(3) = 0;$

д) $I[x_1,x_2]=\int\limits_0^{\pi/2}((x_1')^2+(x_2')^2+3x_1x_2)\,dt,\ x_1(0)=0,\ x_1(\pi/2)=$ $=1,\ x_2(0)=0,\ x_2(\pi/4)=-1;$

е) $I[x_1,x_2]=\int\limits_0^{\pi/4}(2x_1-4x_2^2+(x_2')^2-(x_1')^2)\,dt,\ x_1(0)=0, x_1(\pi/4)=$ $=1,\ x_2(0)=0,\ x_2(\pi/2)=1;$

ж) $I[x_1,x_2]=\int\limits_0^{1}((x_1')^2+(x_2')^2+2x_1)\,dt,\ x_1(0)=1,$ $x_1(1)=3/2, x_2(0)=1\ x_2(1)=1;$

з) $I[x_1,x_2]=\int\limits_2^{3}(tx_1'^2+x_2'^2+tx_1'x_2')\,dt,\ x_1(2)=\ln 3,\ x_1(3),\ x_2(2)=$ $=\ln 2,\ x_2(3)=0.$

4) (*К третьему занятию*). Исследовать функционал $\Phi(x)$ на экстремум при заданных условиях.

а) $\Phi(x)=\int\limits_0^{\pi}x'^2\,dt;\ \psi_1(x)=\int\limits_0^{\pi}x^2\,dt=1;\ x(0)=x(\pi)=0;$

б) $\Phi(x)=\int\limits_0^{1}x'^2\,dt;\ \psi_1(x)=\int\limits_0^{1}x\,dt=3;\ x(0)=1;\ x(1)=6;$

в) $\Phi(x)=\int\limits_0^{1}x'^2\,dt; \psi_1(x)=\int\limits_0^{1}tx\,dt=0; x(0)=-4; x(1)=4;$

г) $\Phi(x)=\int\limits_1^{2}t^3x'^2\,dt; \psi_1(x)=\int\limits_1^{2}x\,dt=2; x(1)=4;$ $x(2)=1;$

д) $\Phi(x)=\int\limits_0^{1}x'^2\,dt;\ \psi_1(x)=\int\limits_0^{1}(x-x'^2)\,dt=\frac{1}{12};$ $x(0)=0\ x(1)=\frac{1}{4};$

е) $\Phi(x)=\int\limits_0^{1}(t^2+x'^2)\,dt;\ \psi_1(x)=\int\limits_0^{1}x^2\,dt=2;\ x(0)=x(1)=0;$

ж) $\Phi(x)=\int\limits_0^{1}x'^2\,dt;\ \psi_1(x)=\int\limits_0^{1}xe^t\,dt=0;\ x(0)=0;$ $x(1)=1.$

5) (*К третьему занятию*). Найти допустимые экстремали:

а) $\Phi(x)=\int\limits_0^{\pi}(x'^2-x^2)\,dt; \psi_1(x)=\int\limits_0^{\pi}x\cos t\,dt=1;$ $x(0)=x(\pi)=0;$

б) $\Phi(x)=\int\limits_0^{\pi/2}(x'^2-x^2)\,dt;\ \psi_1(x)=\int\limits_0^{\pi/2}x\sin t\,dt=1;\ x(0)=$ $=x(\pi/2)=0;$

в) $I[x,z]=\int\limits_0^{1}((x')^2+(z')^2-zx')\,dt,\ x=z+e^t,\ x(0)=2,\ x(1)=$ $=e,\ z(0)=1,\ z(1)=0;$

г) $I[x,z]=\int\limits_0^{\pi/2}((x')^2+(z')^2-2z\cos t-2x^2)\,dt,\ x=z-2\sin t,\ x(0)=$ $=1,\ x(\pi/2)=0,\ z(0)=1,\ z(\pi/2)=2;$

д) $I[x,z]=\int\limits_0^{1}(2tx-(z')^2)\,dt,\ x'-z+2=0,\ x(0)=0,\ x(1)=$ $=\frac{1}{5},\ z(0)=2,\ z(1)=3;$

е) $\Phi(x)=\int\limits_0^{\pi}(x')^2\,dt,\ \int\limits_0^{\pi}x^2\,dt=1,\ x(0)=0,\ x(\pi)=0;$

ж) $I[x,z] = \int\limits_0^1 x'z'\,dt,\ x(0) = x(1) = z(0) = 0,\ z(1) = 1,\ \int\limits_0^1 tx\,dt =$
$= 0,\ \int\limits_0^1 tz\,dt = 0;$

з) $I[x,z] = \int\limits_0^1 ((x')^2 + (z')^2\,dt,\ x(0) = x(1) = z(0) = z(1) =$
$= 0,\ \int\limits_0^1 xz\,dt = -2;$

и) $I[x,z] = \int\limits_0^1 t(x-z)\,dt,\ x(0) = z(0) = z(1) = 0,\ x(1) =$
$= 2,\ \int\limits_0^1 x'z'\,dt = -\frac{4}{5}.$

6) (*К четвертому занятию*). Найти допустимые экстремали функционала $\Phi(x)$ при заданных краевых условиях. Проверить выполнимость условия Лежандра.

а) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 \sin x'\,dt;\ x(0) = 0;\ x(1) = \pi/2;$

б) $\Phi(x) = \int\limits_0^T x'^3\,dt;\ x(0) = 0;\ x(T) = \xi,\ T > 0.$

7) (*К четвертому занятию*). Исследовать на экстремум следующие функционалы при заданных функционалах:

а) $\Phi(x) = \int\limits_0^a (x'^2 + 9x^2)\,dt;\ x(0) = x(a) = 0;$

б) $\Phi(x) = \int\limits_1^2 t^2x'^2\,dt;\ x(1) = 3;\ x(2) = 1;$

в) $\Phi(x) = \int\limits_0^a \frac{dt}{x'};\ x(0) = 0;\ x(a) = b, a, b > 0;$

г) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 x'^3\,dt;\ x(0) = 0;\ x(1) = 1;$

д) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 x'^2\,dt;\ x(0) = 1;\ x(1) = 0;$

е) $\Phi(x) = \int\limits_0^\pi x'^2\,dt;\ x(0) = 0;\ x(T) = \xi, T > 0;$

ж) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (t^2x - x'^2)\,dt;\ x(0) = 0;\ x(0) = x(1) = 0;$

з) $\Phi(x) = \int\limits_0^T x'^3\,dt;\ x(0) = 0;\ x(T) = \xi,\ T > 0;$

и) $\Phi(x) = \int\limits_0^{3/2} (x'^3 + 2x)\,dt;\ x(0) = 0;\ x(3/2) = 1;$

к) $\Phi(x) = \int\limits_0^T (x'^3 - x'^2)\,dt;\ x(0) = 0;\ x(T) = \xi,\ T > 0;$

л) $\Phi(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (x'^2 - x^2 - tx)\,dt;\ x(0) = x(\pi/2) = 0;$

м) $\Phi(x) = \int\limits_0^{3\pi/2} (x'^2 - x^2 - 2x)\,dt;\ x(0) = x(3\pi/2) = 0;$

н) $\Phi(x) = \int\limits_0^T (x'^2 + x^2 - 4x\sin t)\,dt;\ x(0) = 0;\ x(T) = \xi;$

о) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (x'^2 + x^2 + 2x)\,dt;\ x(0) = x(1) = 0.$

8) (*К пятому занятию*). Проверить возможность включения экстремали $x_0(t)$ в поле экстремалей, если

а) $\Phi(x) = \int\limits_0^a (x'^2 + 9x^2)\,dt;\ x(0) = x(a) = 0;$

б) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (x'^4 - 6x'^2)\,dt;\ x(0) = 0;\ x(1) = 2;$

в) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (1+t)x'^2\,dt;\ x(0) = 0;\ x(1) = -2;$

г) $\Phi(x) = \int\limits_0^a (x'^2 - 2tx' - 4x^2)\,dt;\ x(0) = x(a) = 0;$

д) $\Phi(x) = \int\limits_{-1}^2 \dfrac{x}{x'^2}\,dt;\ x(-1) = 4;\ x(2) = 1;$

е) $\int\limits_0^1 ((x')^2 - x(x')^3)\,dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = 0;$

ж) $\int\limits_0^1 (x')^3\,dt,\ x(0) = 0,\ x(b) = c\ (c > 0);$

з) $\int\limits_0^1 h(x)\sqrt{1 + (x')^2}\,dt,\ x(0) = x_a,\ x(b) = x_b\ (h(x) > 0);$

и) $\int\limits_0^1 (6(x')^2 - (x')^4)\,dt,\ x(0) = 0,\ x(b) = c\ (c > 0).$

9) (*К шестому занятию*). Исследовать на экстремум

а) $\Phi(x) = \int\limits_1^2 (tx'^2 + 2x)\,dt;\ x(1) = x(2) = 0;$

б) $\Phi(x) = \int\limits_0^b (x^2 - 2xx' - x'^2)\,dt;\ x(0) = 0;\ x(b) = 1;$

в) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (x - x'^2)\,dt; x(0) = 0;\ x(1) = -1;$

г) $\Phi(x) = \int\limits_a^b (x'^2 + 2tx)\,dt;\ x(a) = 0;\ x(b) = c;$

д) $\Phi(x) = \int\limits_0^1 (12tx' + x'^2)\,dt;\ x(0) = 3;\ x(1) = 0;$

е) $\Phi(x) = \int\limits_{-1}^1 (x^2 + 2txx' - x'^2)\,dt;\ x(-1) = -1;\ x(1) = 1;$

ж) $\Phi(x) = \int\limits_1^2 (tx'^2 + xx')\,dt;\ x(1) = 1;\ x(2) = 0;$

з) $\Phi(x) = \int\limits_{-1}^1 (x^2 + 6xx' - 12tx)\,dt;\ x(-1) = x(1) = 0;$

и) $\Phi(x) = \int\limits_1^2 (x'^2 + 2(1-t)x' - x^2)\,dt;\ x(1) = x(2) = 0;$

к) $\Phi(x) \int\limits_0^a (x'^2 - 4x'\cos t - x^2)\,dt;\ x(0) = x(a) = 0;$

л) $\int\limits_0^a ((x')^2 + 2xx - 16x^2)\,dt,\ x(0) = 0;\ x(a) = 0\ (a > 0);$

м) $\int\limits_1^2 x'(1+t^2x')\,dt,\ x(1)=3,\ x(2)=5;$

н) $\int\limits_0^{\pi/4} (4x^2-(x')^2+8x)\,dt,\ x(0)=-1,\ x(\pi/4)=0;$

о) $\int\limits_0^1 ((x')^2+x^2+2xe^{2t})\,dt,\ x(0)=1/3,$
$x(1)=(1/3)e^2;$

п) $\int\limits_0^{pi/4} (x^2-(x')^2+6x\sin 2t)\,dt,\ x(0)=0,\ x(\pi/4)=1;$

р) $\int\limits_0^2 (x^2+(x')^2-2tx)\,dt,\ x(0)=0,\ x(2)=3.$

10) Другие задачи:

а) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 ((x')^2+x)\,dt-x^2(1),\ x(0)=1;$

б) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 (x')^2\,dt+x^2(0)-2x^2(1);$

в) $\Phi(x)=\int\limits_0^1 ((x')^2+x^2)\,dt-2\operatorname{sh}1\cdot x(1);$

г) $\Phi(x)=\int\limits_0^3 4(x')^2\,dtx^2+x^4(0)-8x(3);$

д) $\Phi(x)=\int\limits_0^{\pi/2} ((x')^2-x^2)\,dt+x^2(0)-x^2(\pi/2)+4x(\pi/2).$

Дополнение II

Дидактический материал по методам оптимизации

Занятие 1. Выпуклые множества

Множество G по определению выпукло, если вместе с каждой парой точек x, y оно содержит отрезок $[x, y]$, их соединяющий, $[x,y]=\{x+\lambda(y-x):\lambda\in[0,1]$. Если G — выпукло, то выпуклым является и замыкание G. Выпуклое множество G совпадает со своей выпуклой оболочкой coG — множеством всех выпуклых комбинаций $\sum\alpha_i x_i \quad (\alpha_i\geqslant 0,\ \sum\alpha_i=1)$ всех конечных наборов $\{x\}\subset G$. Если G_1, G_2 — выпуклые множества и $G_1\cap\iint G_2=\emptyset$, то существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. функционал l такой, что $l(x)\leqslant l(y)$ для любых $x\in G_1, x\in G_2$ (теорема отделимости).

Выпуклое множество K называется конусом, если $\alpha x\in K$ при любых $\alpha\geqslant 0, x\in K$.

Конус допустимых направлений $K(F,x_0)=\{h:\exists(\varepsilon_0>0)\forall(\varepsilon\in(0,\varepsilon_0))[x_0+\varepsilon h\in F]\}$.

Точка $x_0\in G$ — крайняя для G ($x_0\in\mathrm{exG}$), если x_0 не является внутренней ни для одного отрезка из G. Каждое непустое ограниченное выпуклое замкнутое множество G имеет хотя бы одну крайнюю точку, причем $\mathrm{co(exG)}=\mathrm{G}$ (теорема Каратеодори).

Занятие 2. Линейные быстродействия. Задача о мягкой стыковке

Рассматривается конечномерный объект, однозначно определяемый набором параметров $(x_1,\ldots,x_n)=x\in R^n$. Эволюция объекта за время $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ — кривая $x(t)$ в R^n (траектория). На эволюцию объекта влияют контролируемые (управляющие) параметры $(u_1,\ldots,u_m)=u\in U\subset R^m$. Динамика объекта определяется системой

$$\dot x = Ax+Bu \qquad (u\in U), \tag{1}$$

где A и B — матрицы размерностей соответственно $n\times n$ и $n\times m$.

Управлением (1) называют кусочно-непрерывную функцию $u : [t_0, t_1] \to U$. Для каждого управления $u(t)$ промежуток $[t_0, t_1]$ свой. Если управление $u(t)$ фиксировано, то система (1) приобретает вид $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ и имеет единственное решение $x(t)$ для любой начальной точки $x^0 = x(t_0)$. В этом случае говорят, что управление $u(t)$ (и траектория $x(t)$) переводит точку x^0 в точку $x^1 = x(t_1)$. Описанное управление $u(t)$ называют программным.

Задача линейного быстродействия ставится так. Для фиксированных x^0, $x^1 \in R^n$ рассматриваются все управления, переводящие x^0 в x^1. Оптимальное из них — требующее минимального времени.

Обычно конечную точку x^1 фиксируют, совмещая ее с нулем (задача «быстродействия в нуль»). Если $u(t)$ переводит x^0 в нуль, то и функция $u(t+\tau)$, определенная на сдвинутом промежутке, переводит x^0 в нуль за то же время. Значит, время $T(x^0)$ оптимального перевода x^0 в нуль определено однозначно, а соответствующее оптимальное значение $u(t_0)$ определяется точкой x^0, то есть $u(t_0) = u(x^0)$ — значение функции синтеза $u(x)$. Построение функции синтеза — основная цель рассматриваемых ниже задач. Знание функции синтеза $u(x)$ сводит систему (1) к детерминированной $\dot{x} = Ax + Bu(x)$.

Принцип максимума. Пусть $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ — оптимальное управление. Тогда существует нетривиальное $\not\equiv 0)$ решение $\psi(t)$ системы

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \tag{2}$$

для которого почти при всех $t \in [t_0, t_1]$

$$\sup_{v \in U}\langle\psi(t), Bv\rangle = \langle\psi(t), Bu(t)\rangle. \tag{3}$$

Тем самым $u(t) \to \max\limits_{U}\langle\psi(t), Bv\rangle$. Если U — многогранник, то $u(t)$ кусочно-постоянна, причем $u(t) \in \mathrm{exU}$ (здесь exU — множество вершин U). Соответствующая оптимальная траектория склеена из кусков, каждый из которых соответствует постоянному управлению $u(t) = \mathrm{const} \in \mathrm{exU}$.

Схема решения задач:

1) Выписываем $A, -A^*, B$.
2) Решаем систему (2). Из (3) определяется порядок переключений (смены значений) $u(t)$ из exU.
3) Из системы (1) при каждом значении $u \in \mathrm{exU}$ находятся решения, из которых далее клеятся оптимальные траектории.
4) Функция синтеза строится методом движения из нуля «вспять» (оборачиванием времени) при каждом возможном значении $u \in \mathrm{exU}$.
5) Выписываем функцию $u = u(t)$.

Пример 1. Задача о мягкой стыковке:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1 \quad (U = [-1, 1]).$$

Решение.

1) Выписываем $A, -A^*, B$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad -A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Поскольку $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, то $\langle\psi(t), Bv\rangle = \psi_2(t)v$, и в силу равенства максимума (3) $\max\limits_{-1 \leqslant v \leqslant 1}[\psi_2(t)v] = \psi_2(t)u(t)$. Максимум линейной по v функции достигается в одном из концов отрезка $[-1, 1]$ в зависимости от знака $\psi_2(t)$, а именно $u(t) = \operatorname{sign}\psi_2(t)$.

   Решая систему (2), находим $\psi(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_1 \equiv C, \\ \psi_2 = -Ct + C_1. \end{cases}$$

   Итак, $\psi(t)$ — линейная функция, которая меняет знак не более одного раза. Следовательно, оптимальное управление имеет не более одного переключения.

3) Для каждого из оптимальных значений управления $u = \pm 1$ ищем соответствующие траектории:

   а) $u(t) \equiv 1$. Исходная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2^2}{2} + C.$$

   Значению управления $u(t) \equiv 1$ соответствует семейство непересекающихся парабол вида $x_1 = \dfrac{x_2^2}{2} + C$. Движение по ним — снизу вверх (так как $\dot{x}_2(t) \equiv 1 > 0$, т. е. $x_2(t)$ возрастает) на фазовой плоскости Ox_1x_2 изображено на рис. 1.

   В нуль из этого семейства ведет единственная траектория $x_1 = x_2^2/2$ (ее нижняя ветвь).

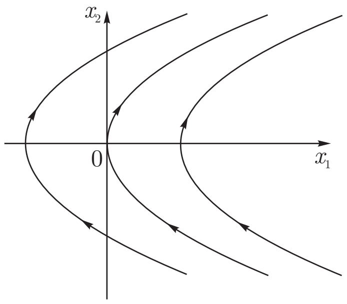

Рис. 1

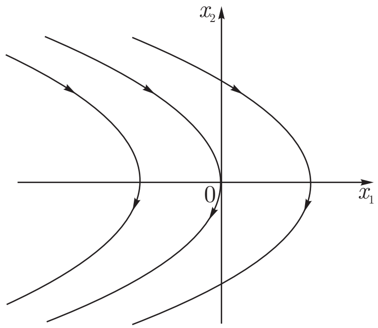

Рис. 2

б) При $u(t) \equiv -1$ исходная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C.$$

Движение по траекториям $x_1 = -x^2/2 + C$ происходит сверху вниз, так как $\dot{x}_2(t) \equiv -1 < 0$, т. е. $x_2(t)$ всюду убывает. На фазовой плоскости Ox_1x_2 это семейство изображено на рис. 2.

В нуль можно попасть при $u(t) \equiv -1$ лишь по параболе $x_1 = -x_2^2/2$, причем только по верхней ветви.

4) Для получения заключительной картины синтеза воспользуемся приемом «движения вспять», т. е. движение будем проводить с конца.

1 случай. Пусть в точку $(0,0)$ мы попали с управлением $u(t) \equiv 1$, т. е. по параболам из первого семейства $x_1 = x_2^2/2 + C$. Лишь одна из них ведет в нуль — это нижняя ветвь параболы $x_1 = x_2^2/2$ (с учетом направления движения). Если процесс происходил без переключения, то в нуль можно было попасть только из точек этой ветви. При наличии переключения (возможно только одно переключение) предпоследнее значение оптимального управления $u(t) \equiv -1$. Но при этом управлении движение было возможно лишь по параболам $x_1 = -x_2^2/2 + C$ сверху вниз до пересечения с кривой ON. Такие параболы заполняют всю плоскость выше линии MON, где MO — верхняя ветвь параболы $x_1 = -x_2^2/2$ (рис. 3).

2 случай. Пусть в нуль мы попали с управлением $u(t) \equiv -1$, т. е. по параболе $x_1 = -x_2^2/2$, причем вдоль ее верхней ветви MO. Без пе-

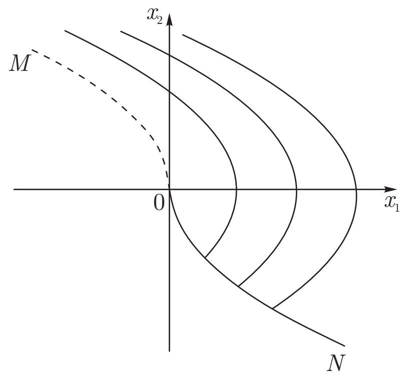

Рис. 3

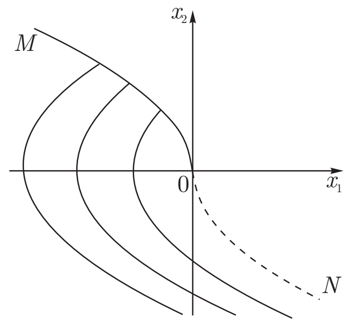

Рис. 4

реключения в точку $(0,0)$ при $u(t) \equiv -1$ можно попасть только из точек ветви MO. Переключений может быть не более одного, поэтому на ветвь MO мы можем попасть при $u(t) \equiv 1$ по параболам семейства $x_1 = x_2^2/2 + C$ (рис. 4).

Все такие параболы заполняют плоскость сплошь ниже линии MON.

5) Заключительная картина синтеза:

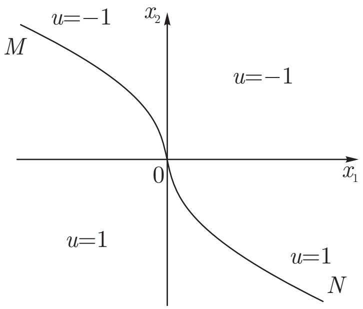

Рис. 5

Линия MON называется линией переключения. Функция синтеза

$$u(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \text{ выше линии } MON \text{ или } x \in ON, \\ 1, & \text{если } x \text{ ниже линии } MON \text{ или } x \in OM. \end{cases}$$

Замечание. Если в исходной задаче U есть отрезок общего вида $U = [a, b]$, то оптимальное управление $u(t) = \begin{cases} a, & \psi_2(t) < 0 \\ b, & \psi_2(t) > 0 \end{cases}$ имеет, самое большее, одно переключение, а оптимальные траектории строятся из кусков парабол $x_1 = a\dfrac{x_2^2}{2} + C$, $x_1 = b\dfrac{x_2^2}{2} + C$.

Занятие 3. Линейные быстродействия. Колебательные системы

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \qquad |u| \leqslant 1.$$

Решение.

1) Выписываем A, $-A^*$, B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) В силу принципа максимума (вспомните его): если $u(t)$ — оптимальное управление, то существует нетривиальное решение системы $\dot{\psi} = -A^*\psi$, для которого при каждом $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$\max_{v \in U} \langle \psi(t), Bv \rangle = \max_{v \in U} \psi_2(t) v = \psi_2(t) u(t).$$

Выражение $[\psi_2(t)]v$ — линейно по v. Поэтому оптимальное управление принимает вид

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \psi_2(t) < 0, \\ 1, & \psi_2(t) > 0. \end{cases}$$

Решая систему $\dot{\psi} = -A^*\psi(t)$, находим $\psi_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, \\ \ddot{\psi}_2 + \psi_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\psi}_1 = C_1 \sin(t + C_2), \\ \dot{\psi}_2 = C_1 \cos(t + C_2), \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Функция $\psi_2(t) = C_1 \cos(t + C_2)$ может меняться через π единиц времени. Следовательно, соседние переключения отстоят друг от друга на π единиц.

3) Для каждого из значений $u = \pm 1$ ищем соответствующие траектории.

а) $u(t) = -1$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + 1). \end{cases} \Rightarrow (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = C^2.$$

Управлению $u(t) = -1$ соответствует семейство окружностей с центром в точке $(-1, 0)$ вида $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = C^2$. Направление по ним определяется следующим образом: так как $\dot{x}_1 = x_2$, то при $x_2 > 0$ (в верхней полуплоскости) движение слева направо; при $x_2 < 0$ (в нижней полуплоскости) — справа налево. Заметим, что только одна из окружностей этого семейства приводит в нуль: $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1$ (движение по часовой стрелке) (рис. 6).

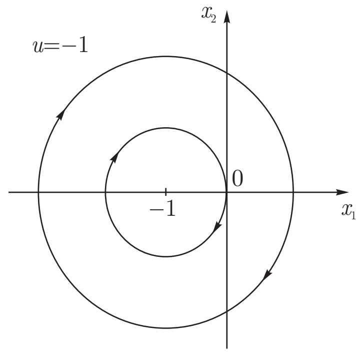

Рис. 6

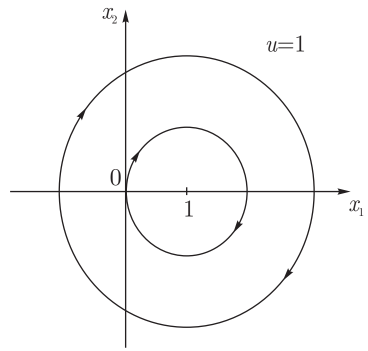

Рис. 7

б) $u(t) = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 - 1). \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = C^2.$$

Управлению $u(t) = 1$ соответствует семейство окружностей $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = C^2$ с центром в точке $(1, 0)$. Направление движения по каждой из них определяется аналогично предыдущему: так как $\dot{x}_1 = x_2$, то при $x_2 > 0$ (в верхней полуплоскости) движение слева направо; при $x_2 < 0$ (в нижней полуплоскости) — справа налево.

Заметим, что в этом семействе есть единственная окружность, которая (с учетом направления движения) приводит в $(0,0)$: $(x_1-1)^2+x_2^2=1$.

4) Для получения общей картины синтеза вспомним, что $u(t)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая значения 1 и -1, причем переключение с одного значения на другое происходит точно через π. Значит, оптимальная траектория должна состоять из чередующихся кусков окружностей обоих типов, причем переход с окружности одного типа на другой происходит не более чем через π единиц времени, т. е. при прохождении не более половины окружности, а между двумя соседними переключениями мы должны пройти точно полуокружность.

Используем прием «движения вспять». Рассмотрим два случая.

1 случай. Пусть в точку $(0,0)$ мы попали с управлением $u=-1$, т. е. по окружности $(x_1+1)^2+x_2^2=1$ (точнее, по верхней половине, учитывая направление движения и то, что по одной окружности можно двигаться не более ее половины), если процесс происходил без переключения. При наличии переключений (а их может быть бесконечно много) предпоследнее значение оптимального управления $u=1$. Но при этом управлении движение возможно по окружностям $(x_1-1)^2+$ $+x_2^2=C^2$ по часовой стрелке, причем проходится не более половины каждой из них (рис. 8).

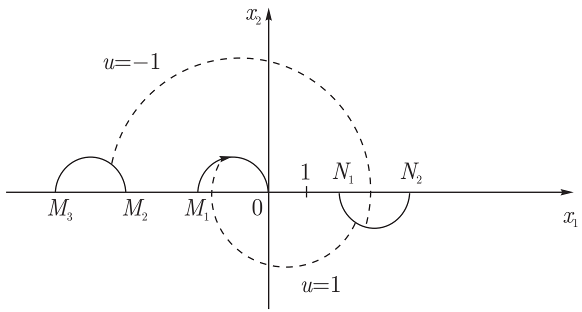

Рис. 8

Другими словами, при описании предыстории, каждая точка полуокружности M_1O (верхней) вращается против часовой стрелки вокруг точки $(1,0)$. Предыстория M_1O при повороте на π, т. е. на полови-

ну круга, совпадает с нижней полуокружностью N_1N_2. Если управление имело более двух переключений, то предпоследнему участку постоянства $u(t)$ соответствует переход с N_1N_2 на M_1O, причем предпоследнее переключение происходит при переходе N_1N_2. Разматывая предысторию M_1O далее, получим аналогично, что третье от конца переключение происходит на полуокружности M_3M_2 и так далее.

2 случай. Пусть в нуль мы попали с управлением $u=1$, т.е. по окружности $(x_1-1)^2+x_2^2=1$ из второго семейства. Учитывая направление движения, в нуль ведет лишь ее нижняя половина. Если двигаться с переключением, то, рассуждая аналогично предыдущему, получим рис. 9.

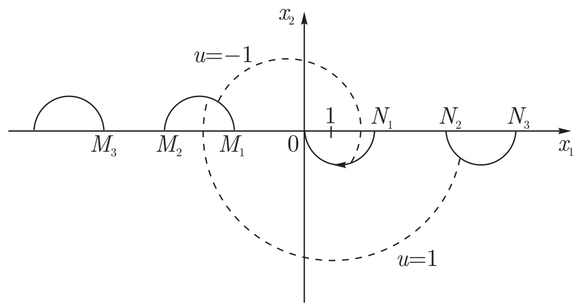

Рис. 9

Заключительная картина синтеза имеет вид:

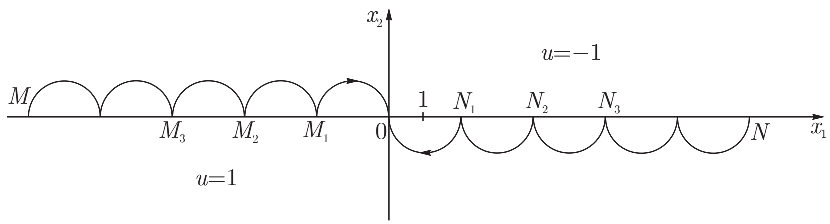

Рис. 10

Функция синтеза:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ниже } MON, x \in ON_1, \\ -1, & x \text{ выше } MON, x \in OM_1. \end{cases}$$

Замечание. Если в исходной задаче U есть отрезок общего вида $U = [a, b]$, то оптимальное управление $u(t) = = \begin{cases} a, & \Psi_2(t) < 0, \\ b, & \Psi_2(t) > 0, \end{cases}$ имеет бесконечно много переключений, происходящих через π единиц времени, а оптимальные траектории строятся из кусков окружностей $(x_1 - a)^2 + x_2^2 = C^2$, $(x_1 - b)^2 + x_2^2 = C^2$.

Занятие 4. Линейные быстродействия. Условие общности положения. Двумерное управление

1. Условие общности положения

Рассмотрим задачу быстродействия в нуль:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (x \in R^n, u \in U \subset R^m), \tag{1}$$

U — многогранник, A, B — матрицы размерностей соответственно $n \times n$, $n \times m$.

Определение. *Многогранник U находится в общем положении для исходной задачи, т. е. системы (1), если $0 \in U$ и $\notin \operatorname{ex} U$ и если для любого вектора h, параллельного одному из ребер U, вектор Bh не принадлежит ни одному собственному подпространству матрицы A.*

Проверка условия общности положения:

1) $0 \in U \setminus \operatorname{ex} U$.
2) Для любого h, параллельного одному из ребер многогранника, векторы Bh, $A(Bh)$, ..., $A^{n-1}(Bh)$ линейно независимы. (Их линейная зависимость эквивалентна равенству нулю определителя, столбцами которого являются эти векторы).

Пример. Проверить условие общности положения в примере 1 из предыдущей темы.

1) $0 \in [-1, 1] \setminus \{-1, 1\} = (-1, 1)$.

2) $h \in R^1$; $Bh = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$; $A(Bh) = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$.

Считаем $\det \begin{vmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{vmatrix} = -h^2 \neq 0$ $(h \neq 0)$.

Условие общности положения обеспечивает оптимальность траекторий, построенных ранее изученным методом.

2. Двумерное управление

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - u_1. \end{cases}; \quad \begin{matrix} |u_1| \leqslant 1 \\ |u_2| \leqslant 1 \end{matrix}$$

1) Выписываем необходимые матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) В силу принципа максимума, так как $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$, $Bv = = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$, имеем

$$\sup_{\substack{|v_1| \leqslant 1 \\ |v_2| \leqslant 1}} \langle \psi(t), Bv \rangle = \sup_{\substack{|v_1| \leqslant 1 \\ |v_2| \leqslant 1}} [\psi_1(t)v_2 - \psi_2(t)v_1] = \\ = \psi_1(t)u_2(t) - \psi_2(t)u_1(t).$$

Функция $\psi_1(t)v_2 - \psi_2(t)v_1$, линейная по $v = (v_1, v_2)$, принимает максимальное значение в вершинах многогранника $U = \{(v_1, v_2) \in R^2 : |v_1| \leqslant 1, |v_2| \leqslant 1\}$, т. е.

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) = \begin{cases} (1, 1), & \psi_1(t) > 0, \psi_2(t) < 0, \\ (1, -1), & \psi_1(t) < 0, \psi_2(t) < 0, \\ (-1, -1), & \psi_1(t) < 0, \psi_2(t) > 0, \\ (-1, 1), & \psi_1(t) > 0, \psi_2(t) > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Оптимальное управление меняет значение, когда меняет знак хотя бы одна из функций $\psi_i(t)$ $(i = 1, 2)$.

Решая систему $\dot\psi = -A^*\psi$, находим

$$\begin{cases} \dot\psi_1 = -\psi_2, \\ \dot\psi_2 = \psi_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_1 = C_1\cos(t + C_2), \\ \psi_2 = C_1\sin(t + C_2), \end{cases}$$

где C_1, C_2 — константы. Одна из координат $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ меняет знак точно через $\dfrac{\pi}{2}$ единиц времени. Порядок переключения значений $u(t)$ соответствует порядку смены знаков у координат $(\psi_1(t), \psi_2(t)) = (C_1\cos(t + C_2), C_1\sin(t + C_2))$. Если начать с момента t_0, когда $C_1\cos(t_0+C) > 0$, $C_1\sin(t_0+C) > 0$, т. е. когда $u(t_0) = (-1, 1)$, то первой после t_0 меняет знак $\psi_1(t) = C_1\cos(t + C)$, т. е., согласно (2), следующее значение $u(t)$ есть $(-1, -1)$. Далее изменит знак $\psi_2(t) = C_1\sin(t + C)$, т. е. очередное значение $u(t)$ будет, согласно (2), $(1, -1)$, а после очередного переключения будет $u(t) = (1, 1)$. Таким образом, при переключении порядок смены вершин U (значений $u(t)$) такой: $(-1, 1) \to (-1, -1) \to (1, -1) \to (1, 1) \to (-1, 1) \to$ $\to$ и т. д.

3) Для каждого из значений оптимального управления ищем соответствующие траектории.

Исходную систему решим в общем виде ($u_1 = \mathrm{const}$, $u_2 = \mathrm{const}$):

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_2 + u_2, \\ \dot x_2 = x_1 - u_1. \end{cases} \Rightarrow [(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 = C^2].$$

Таким образом, каждому стационарному значению управления $u = (u_1, u_2)$ соответствует семейство окружностей с центром в точке (u_1, u_2), движение по которым происходит против часовой стрелки. В каждом из четырех семейств есть единственная окружность, приводящая (с учетом направления движения) в нуль $(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 = 2$ (рис. 11).

4) Для получения заключительной картины синтеза вспомним, что переключение с одного значения $u(t)$ на другое происходит через $\pi/2$. Значит, оптимальная траектория должна состоять из чередующихся кусков окружностей четырех типов, причем между двумя соседними переключениями мы должны пройти точно четверть соответствующей окружности.

Используем прием «движения вспять».

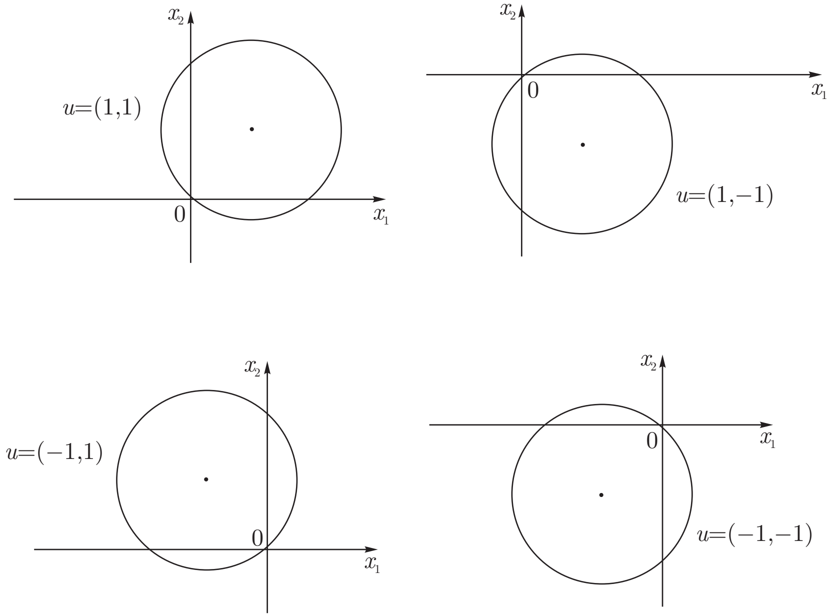

Рис. 11

1 случай. В нуль мы попали со значением управления $u(t) = (-1, 1)$, т. е. по окружности $(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 2$, двигаясь по ней против часовой стрелки. Это — дуга от точки $(-2, 0)$ до $(0, 0)$, поскольку с одним значением управления можно двигаться не более четверти окружности. При наличии переключений (а их может быть бесконечно много) предпоследнее значение оптимального управления $u(t) = (1, 1)$, т. е. движение по окружностям вида $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 2$, причем по каждой из них проходится не более ее четверти. Значению управления $u(t) = (1, 1)$ предшествует $u(t) = (1, -1)$, т. е. движение по окружностям с центром $(1, -1)$, а ему — значение $u(t) = (-1, -1)$, т. е. движение по окружностям вида $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$, и так далее (рис.12а)).

Аналогичные рассуждения при различных значениях управления на заключительном этапе приводят еще к трем картинкам ($u_{\text{закл.}} = (1, 1)$ — рис. 12 б); $u_{\text{закл.}} = (1, -1)$ — рис. 12 в); $u_{\text{закл.}} = (-1, -1)$ — рис. 12 г)).

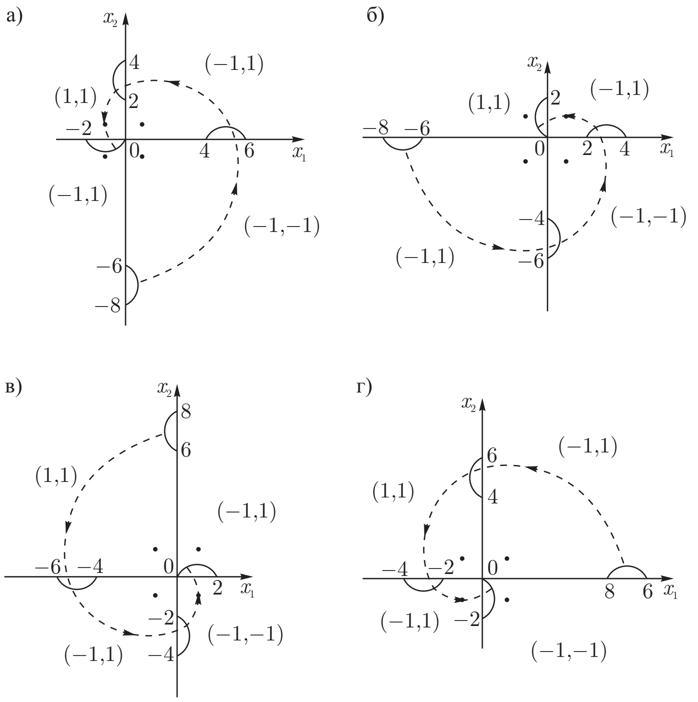

Рис. 12

Заключительная картина синтеза имеет вид рис. 13.

Функция синтеза

$$
u(x) = \begin{cases} (1,-1), & x \in A \quad \text{или} x \in a, \\ (1,1), & x \in B \quad \text{или} x \in b, \\ (-1,1), & x \in C \quad \text{или} x \in c, \\ (-1,-1), & x \in D \quad \text{или} x \in d. \end{cases}
$$

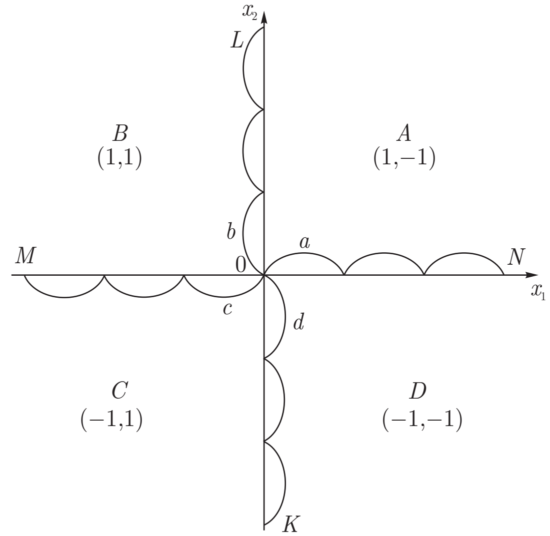

Рис. 13. OM, OL, ON, OK — линии переключения

Условия общности положения: 1) $0 \in U \setminus \operatorname{ex} U$; 2) для любого вектора $h = \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}$, параллельного вертикальным сторонам квадрата U:

$$
Bh = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$
A(Bh) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & h_2 \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Случай вектора $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, параллельного горизонтальным сторонам квадрата U, рассматривается аналогично.

Занятие 5. Нелинейные системы

Для случая когда управляемый объект описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $x \in R^n$, $u \in U \subset R^m$ построение функции синтеза для задачи быстродействия в нуль, когда оно возможно, осуществляется разобранными методами применительно к соответствующей формулировке принципа максимума.

Принцип максимума. Расширим систему (1), добавляя уравнение $\dot{x}_0 = f_0$, где $f_0 \equiv 1$. Полагая $æ = (x_0, x) = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ и $F = \{f_0, f_1\} = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$, перепишем систему (1) в виде

$$\dot{æ} = F(æ, u). \tag{2}$$

С помощью функции Гамильтона

$$H(\psi, æ, u) = \langle \psi, F(æ, u) \rangle \tag{3}$$

введем систему

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = \overline{0, n}). \tag{4}$$

Если $u(t), x(t)$ — оптимальные управления и траектория, то существует нетривиальное решение $\psi(t)$ системы (4), для которого справедливо равенство максимума

$$\sup_{v \in U} H(\psi(t), æ(t), v) = H(\psi(t), æ(t), u(t)). \tag{5}$$

Схема решения аналогична разобранному ранее.

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1.$$

1) Расширяем исходную систему, добавляя уравнение $\dot{x}_0 = f_0 \equiv 1$. Обозначим $æ = (x_0, x_1, x_2)$. Исходная система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 1, \\ \dot{x}_1 = u^2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases}$$

причем $F(æ, u) = (1, u^2, x_1)$.

2) Введем в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(\psi, æ, u) = \langle \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ u^2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rangle = \psi_0 + \psi_1 u^2 + \psi_2 x_1.$$

3) В силу принципа максимума, если $u(t)$ — оптимальное управление, то существует нетривиальное решение $\psi(t)$ системы (4) такое, что

$$\begin{aligned} &\sup_{-1 \leqslant v \leqslant 1} [\psi_0(t) + \psi_1(t) v^2 + \psi_2(t) x_1(t)] = \\ &= \psi_0(t) + \sup_{-1 \leqslant v \leqslant 1} [\psi_1(t) v^2 + \psi_2(t) x_1(t)] = \\ &= \psi_0(t) + \psi_1(t) u^2(t) + \psi_2(t) x_1(t); \\ &\sup_{-1 \leqslant v \leqslant 1} \psi_1(t) v^2 = \psi_1(t) u^2(t). \end{aligned}$$

Функция $\psi_1 v^2$ (квадратичная по v) принимает на $[-1, 1]$ максимальное значение в точках $v = \pm 1$, если $\psi_1 > 0$, и в точке $v = 0$, если $\psi_1 < 0$, т. е.

$$u(t) = \begin{cases} \pm 1, & \psi_1(t) > 0, \\ 0, & \psi_1(t). \end{cases}$$

Решая систему (2), находим $\psi(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0 \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_= C_0 \\ \psi_1 = -C_2 t + C_1 \\ \psi_2 = C_2. \end{cases}$$

Поскольку $\psi_1(t) = -C_2 t + C_1$ линейная функция, которая может менять знак не более одного раза, оптимальное управление $u(t)$ имеет не более одного переключения.

4) Для каждого из оптимальных значений управления $u = 0$; $u = \pm 1$ ищем соответствующие траектории.

   а) При $u = \pm 1$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \left(x_2 = \frac{x_1^2}{2} + C \right).$$

   Значениям управления $u = \pm 1$ соответствует семейство непересекающихся парабол вида $x_2 = \dfrac{x_1^2}{2} + C$. Движение по ним — слева направо, поскольку $\dot{x}_1(t) = 1$. В нуль из этого семейства

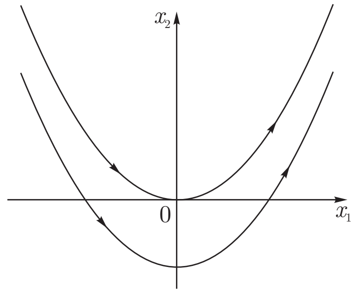

Рис. 14

ведет единственная траектория $x_2 = \dfrac{x_1^2}{2}$ (с учетом направления движения — ее левая ветвь) (рис. 14).

б) При $u = 0$ исходная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow [x_1 \equiv C].$$

Значению управления $u = 0$ соответствует семейство прямых вида $x_1 \equiv C$, причем по прямой $x_1 = 0$ движения не будет, поскольку $\dot{x}_2 = x_1 = 0$. Из исходной системы для случая $u = 0$ видно, что движение в правой полуплоскости происходит снизу вверх, в левой — сверху вниз (рис. 15).

5) Для получения заключительной картины синтеза вспомним, что $u(t)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая значения $\pm 1; 0$, имеющая не более одного переключения, поэтому, используя прием «движения вспять», получим рис. 16.

Функция синтеза:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ \pm 1, & x \in OM. \end{cases}$$

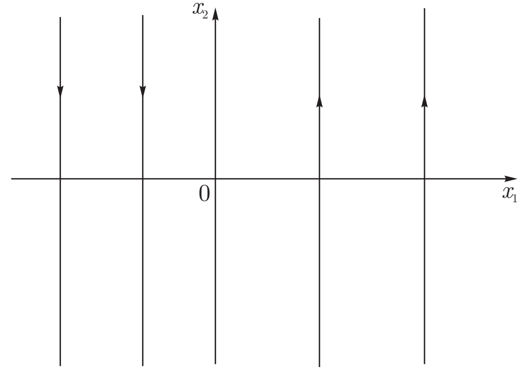

Рис. 15

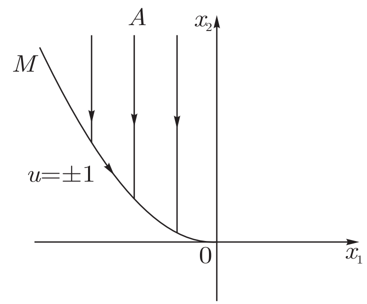

Рис. 16

Задачи для самостоятельного решения

1) Является ли выпуклым множество G в R^2, определяемое неравенством:

а) $x_1^2 \leqslant x_2 + 1$;

б) $x_1^2 \leqslant x_2 - 1$;

в) $x_1^2 \leqslant x_2^2 + 1$;

г) $x_1^2 + 2x_2^2 \geqslant 1$;

д) $|x_2| \leqslant x_1 + 1$;

е) $2x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1$;

ж) $0 \leqslant x_1 \leqslant 2x_2 \leqslant x_1 + 1$?

2) Является ли конусом каждое из следующих множеств: а) в R^2

а) $x_2 \leqslant x_1$;

б) $x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$;

в) $2x_2 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}x_2$;

г) $|x_1| \geqslant x_2$; $x_2^2 \leqslant x_1^2$; $x_1 \leqslant x_2^2$?

б) в R^3

а) $x_1^2 + x_2^2 \geqslant x_3$;

б) $|x_1| \leqslant x_2 \leqslant x_3$?

3) Если $K \neq R^n$ и $n > 1$, то $K \bigcup (-K) \neq R^n$. Доказать.

4) K — конус, l — положительный на K линейный функционал. Ограничено ли множество $\{x \in K : l(x) \leqslant 1\}$?

5) $[K(G, x_0) = R^n] \Longleftrightarrow [x_0 \in intG]$.

6) [Опорная к G в точке x_0 плоскость единственна] $\to$ [$x_0 \in$ exG].

7) Указать крайние точки для:

(а) всех множеств из задач 1, 2;

(б) полушария;

(в) полукруга.

8) Каждый конус имеет не более одной крайней точки (доказать!). А менее — может?

9) Решить следующие задачи линейного быстродействия:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad -1 \leqslant u \leqslant 2;$

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - u, \end{cases} \quad \leqslant u \leqslant 1;$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2u, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - u, \end{cases} \quad -2 \leqslant u \leqslant 1;$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad \leqslant u \leqslant 2;$

е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1;$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3u, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1;$

з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - u, \end{cases} \quad -1 \leqslant u \leqslant 3;$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 2u, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \quad -1 \leqslant u \leqslant 0;$

л) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = 2u, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1.$

10) Решить задачи быстродействия в нуль для колебательных систем

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1;$

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - u, \end{cases} \quad -2 \leqslant u \leqslant 1;$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = u - x_1, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

г) $\begin{cases} \dot{x}_x = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -u - x_1, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2u, \\ \dot{x}_2 = u - x_1, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = 2u - x_1, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad -1 \leqslant u \leqslant 0;$

з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = -(u + x_1), \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = u - x_1, \end{cases} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1;$

к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

л) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = u - x_1, \end{cases} \quad -1 \leqslant u \leqslant 0;$

м) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \quad 0 \leqslant u \leqslant 2.$

11) Найти функцию синтеза

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - u_2 \end{cases}; \quad \begin{matrix} |u_1| \leqslant 1 \\ |u_2| \leqslant 2 \end{matrix};$

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases}; \quad \begin{matrix} |u_1| \leqslant 1 \\ 0 \leqslant u_2 \leqslant 1 \end{matrix};$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases}; \quad \begin{matrix} |u_1| \leqslant 1 \\ |u_2| \leqslant 2 \end{matrix};$

г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - u_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_1 \end{cases}; \quad \begin{matrix} |u_1| \leqslant 1 \\ |u_2| \leqslant 1 \end{matrix};$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases}; \quad \begin{matrix} 0 \leqslant u_1 \leqslant 1 \\ |u_2| \leqslant 1 \end{matrix};$

е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - u_1 \end{cases}; \quad \begin{matrix} 0 \leqslant u_1 \leqslant 1 \\ |u_2| \leqslant 1 \end{matrix}.$

12) Построить функцию синтеза

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - u^2, \\ \dot{x}_2 = u^2, \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u^2, \\ \dot{x}_2 = u^2 - x_1, \end{cases} \quad 0 \leqslant u \leqslant 2;$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - u^2, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + 1), \end{cases} \quad |u| \leqslant 1;$

Литература

[1] Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. — М.: Наука, 1984.

[2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.

[3] Ахиезер Н.И. Вариационное исчисление. — Харьков: Вища шк., 1981. — 168 с. (РЖМат, 1982, 3Б627К).

[4] Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. — М.: Гостехиздат., 1955.

[5] Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965. — 276 с. (РЖМат, 1966, 1Б89К)

[6] Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.

[7] Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1965.

[8] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980. — 518 с. (РЖМат, 1981, 4Б1052К)

[9] Васильев Ф.П. Численные методы экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.

[10] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. — М.:МГУ, 1989. — 204 с. (РЖМат, 1990, 1Б522К).

[11] Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961. — 228 с. (РЖМат, 1963, 1Б330К).

[12] Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.

[13] Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М. Наука, 1971.

[14] Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применение. — М.: Прогресс, 1966.

[15] Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. —М.: Наука, 1982.

[16] Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. — М.: Сов. радио, 1973.

[17] Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. — М.: Наука, 1969.

[18] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с. (РЖМат, 1974, 11Б707К).

[19] Карманов В.Г. Математическое программирование. — М.: Наука, 1980.

[20] Моисеев Н.Н. Численные методы в решении оптимальных систем. — М.: Наука, 1971.

[21] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

[22] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1980.

[23] Тихомиров В.М. Принцип Лагранжа и задачи оптимального управления. — М.: Изд. МГУ, 1982.

[24] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 478 с. (РЖМат, 1979, 2Б468К).

[25] Фиакко А. Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. — М.: Мир, 1972.

[26] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. — М.: Наука, 1969.

[27] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управнения. — М.: Мир, 1974. — 488 с. (РЖМат, 1975, 2Б474К),

Покорный Ю.В.

Оптимальные задачи

Дизайнер
Технический редактор
Компьютерный набор и верстка
Корректор

Подписано в печать 19.03.2008. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. ???. Уч. изд. л. ????.
Гарнитура ???. Бумага офсетная №1.
Тираж ???? экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295